连续介质力学

Continuum Mechanics

（上）

动载固体力学与应力波

Dynamical Solid Mechanics and Stress Waves

吕洪生　曾新吾　编著





国防科技大学出版社
长沙

目　录



第三章 连续介质运动学

第四章 连续介质力学的基本定律

第五章 本构方程

序　言

连续介质力学(Continuum Mechanics)，从广义上讲，它是以连续介质假设为基础的多力学学科的总称，例如流体力学、水利力学、气体动力学、弹性力学、塑性力学、爆炸力学等均属于连续介质力学的范畴。它是一般的力学专业、工程力学专业、爆炸力学专业等重要的共同基础或专业内容。

连续介质力学是经典理论力学的发展。作为力学，它当然是研究连续介质的宏观性状，即研究物质的宏观机械运动，而不管物质的真实微观结构，尽管物质是由大量的分子组成。因此，连续介质不对物质的真实微观结构作任何探讨，但与物质结构理论并不矛盾，而是相辅相成的。物质结构理论研究的是物质微观情况，即研究物质的特殊结构，而连续介质力学则研究具有不同微观结构物质的共同性状。

连续介质力学的主要目的在于建立各种物质的力学模型，并给出各种物质的本构关系的数学表达式，同时在给定的初始条件和边界条件下求出问题的解。概括起来，它涉及如下基本内容：①变形几何学。研究连续介质变形的几何性质，确定变形所引起物质各部分空间位置和方向的变化，以及各邻近点相互距离的变化，即研究诸如运动、变形、变形梯度、变形张量等。②运动学。主要研究连续介质力学中各种物理量随时间的变化率，这包括速度梯度、变形速率、旋转速率等。③基本方程。根据适用于所有物质的守恒定律建立的方程，例如对于热力连续介质力学建立有连续性方程、运动方程、能量方程、熵不等式等。④本构关系。⑤特殊理论。例如弹性理论、塑性理论、流体与气体动力学、粘性流体理论等。⑥问题的求解。

连续介质力学分为经典连续介质力学(Classical Continuum Mechanics)和近代连续介质力学(Modern Continuum Mechanics)。

1. 经典连续介质力学。它侧重研究两种典型的理想介质，即线弹性物质和线粘性物质。这两种物质模型能够很好地描述在工程技术上所处理的很多介质的特性，因此经典连续介质理论至今仍被广泛应用并将继续发挥解决实际问题的能力。

2. 近代连续介质力学。它是在二次大战以后发展起来的，它是经典连续介质力学的发展和扩充，具体表现在：①物体不必只看作是质点的集合；它可能是由具有微结构的质点集合体。②运动不必总是光滑的，运动有激波、扩散等。③物体不必只受力的作用，它也可承受体力偶、力偶应力，以及电磁场所引起的效应等。④对本构关系进行更加概括的研究。⑤重点研究非线性问题。

近年来，近代连续介质力学在其深度和广度上都取得了很大进展，并出现了下述三个方向：①按照理性力学(Rational Mechanics)的观点和方法研究连续介质理论，从而发展成理性连续介质力学。②把近代连续介质力学和电子计算机结合起来，从而发展成为计算连续介质力学。③把近代连续介质力学的研究对象扩大，从而发展成为连续系统物理学(Continuum Physics)。

然而，本书“别具一格”、“与众不同”，它既非“经典”，又非“近代”。它介于经典与近代之间，它也不同于现已出版的众多的《连续介质力学》，这些书都是针对具有流体力学和固

体力学基础的读者的高级概论。本书主要是针对爆炸力学和爆炸物理专业的本科生和研究生的，它系统地给出：连续介质力学的数学基础、应力分析、运动与变形、基本物理规律、本构方程、不可压流体力学、气体动力学、爆轰学、爆炸作用、动载固体力学、应力波理论等。总之，它给出了该专业所需要的全部基础内容。所以从本书的结构体系和所述内容来看，它也不同业已出版的针对爆炸物理和爆炸力学专业的力学著作。本书既考虑到该专业的已往基础，又考虑到该学科的最新发展，如增加了动载固体力学、应力波理论和不可压流体力学、本构方程等内容；同时结合大型专题介绍了力学中的三大计算方法（特征法计算、有限差分法和有限元法）。

本书除了适用于本专业的本科生和研究生之外，它还可作为爆炸作用、强冲击载荷、材料动载响应、爆炸加工以及一般的力学专业的本科生、研究生和有关的科技人员的教材或参考书。

本书分成三册，上册为《连续介质力学基础》，其内容包括：序言、张量基础、场论初步、应力分析、运动与流动、守恒规律和本构关系等；中册为《流体力学与爆炸力学》，内容包括：流体力学基本方程组、流体静力学、不可压流动、位势理论与射流、气体动力学方程、冲击波与特征线理论、量纲理论、波的相互作用与具体应用、炸药与爆炸概论、爆轰波理论、爆轰产物的飞散与爆炸作用等；下册为《动载固体力学与应力波》，内容包括：应变分析、弹性、塑性、滑移线理论、粘弹、流体弹塑性理论与计算、有限元法、高压本构、应力波理论基础等。

本书是在作者为原电力部工程技术人员编著的《爆炸压接理论基础》的基础之上，以 G. E. Mase 的《Continuum Mechanics》为基本蓝图，并参照有关流体、固体与爆炸等方面的专著，扩充改编而成。由于内容较广、跨度较大，全书约 23 万字；更兼写作匆忙、作者学识有限，所以本书作为初次尝试，难免有缺点与不足，望多指正。

作者　1999 年 9 月

第一章　连续介质力学的数学基础

质力学(Continuum Mechanics)是以广泛而深厚的数学作为研究的基础，它除高等数学基础之外，还需要一些特殊的数学分支，其中最重要的是张量和场

一　张量基础

1.1　张量及其定义

续介质力学和理论物理中广泛地采用张量，这不仅因为采用张量来表示基本写高度简练；而更重要的是，因为连续介质力学中所出现的一些重要的基本物力、应变等，本身就是张量。所以张量对于连续介质力学的研究十分重要。

tensors)，在数学上讲，它是不依赖于任何特定的坐标系而存在的量，它是用来存在的物理量的。

质力学以及各物理学科中所研究的物理量均不依赖于坐标系，然而要在数量物理量并对其进行计算，常常又需要选参考的坐标系。物理量在不同的坐标系同的表征量，即给出一些不同的分量。但这些坐标系所表述的物理量又是客观一个物理量，因此在不同坐标系其不同的表征数值之间必有确定的变换规律：在系下物理量(亦即张量)其诸分量已知，则在另一坐标系下该张量的各分量就完了。这正是张量独立于坐标系的反映。其分量是满足一定的坐标变换规律的量，也张量的另一种定义。

在研究任意两个曲线坐标系之间的一般变换时所定义的张量称作一般张量或普遍张general tensors)。从一个笛卡尔坐标系(Cartesian coordinate system)到另一个笛卡尔标系变换的张量称作笛卡尔张量(Cartesian tensors)。由于连续介质力学的大部分物理都是利用笛卡尔张量建立的，所以在本书中张量一词则意指笛卡尔张量，除非特别指。

张量按照它们所服从变换规律的特定形式可以用秩或阶(rank or order)来分类，这分类体现在一个给定张量在 n 维空间所具有分量的个数上，如在作为三维欧几里德空(Euclidean space)的一个任意的物理空间中，一个张量的分量个数则为 3^N，在这里 N 张量的阶。因此在物理空间中零阶张量在任一个坐标系中均以一个分量表征，零阶张量作标量(scalars)，只具有大小的物理量由标量表示。在物理空间中一阶张量具有三个坐分量，一阶张量称作矢量(vectors)，既具有大小又具有方向的物理量由矢量表示。二阶量对应着并矢式(dyadics)，在连续介质力学中几个重要的物理量都由二阶张量表示，应力张量(stress tensor)和应变张量(strain tensor)。当然在连续介质力学中也出现更阶张量，三阶张量对应三并矢式(triadics)，四阶张量对应四并矢式(tetradics)……

1.2 矢量与标量

某些物理量，如力和速度，它们既具有大小，又具有方向，在三维空间，它们可用服从平行四边形相加法则(parallelogram law of addition)的有向线段表示。这样的有向线段(directed line segments)是一阶张量或称矢量的几何表示，矢量的图示是一个指向一定方向的箭头，该箭头的长度与矢量的大小成比例。等价矢量是具有同样方向、同等大小的矢量；零矢量(null or zero vector)是一个具有零值大小不定方向的矢量；一个负矢量是与原矢量大小相等、方向相反的矢量。

对于像质量和能量的那样物理量，它们只具有大小，故由称作标量的零阶张量表示。

按吉布斯写法(Gibbs natation)，矢量用正黑体字母表示，但在本书用黑斜字母。标量用斜体字母表示，如 a、b、λ 等。单位矢量用斜黑体字母之上加一个凸字符表示，如 $\hat{\boldsymbol{e}}$。图1.1 给出任意矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 以及一对等矢量 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$。

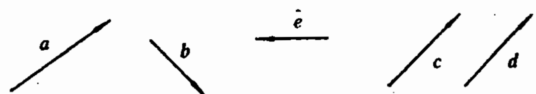


图 1.1

二阶及二阶以上的张量用大写全黑正体字母表示，如用 **D**、**E** 等(若按吉布斯写法则用重黑正体字母)。

任一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小即数值，写成 a，或者表成 $|\boldsymbol{a}|$。

1.1.1 矢量相加、矢量与标量相乘

矢量相加服从平行四边形法则。按该法则，两个矢量的合矢量为以这两个矢量为邻边的平行四边形的对角线(diagonal)，见图 1.2(a)。上述矢量相加法则也等价于三角形法则(triangle rule)，按该法则，两个矢量的合矢量为由一个矢量的头接另一个矢量尾所构成的三角形的第三边。代数上，矢量相加由如下矢量方程表示

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c} \qquad (1.$$

矢量相减(vector subtraction)可用负矢量相加实现，如图 1.2(b)所示，因此

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{d} \qquad (1.$$

矢量相加和矢量相减满足交换律和结合律(commutative law and associative law)，如图 1.2(c)所示，因此

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{g}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{g})=\boldsymbol{h} \qquad (1.$$

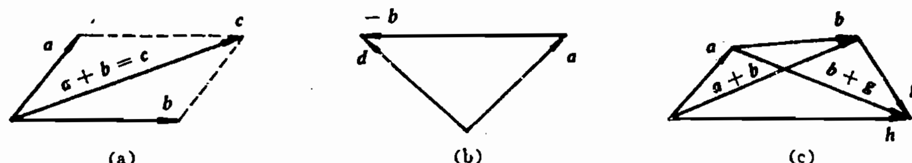


图 1.2

一个矢量与一个标量的积一般给出一个新的矢量，这个矢量与原矢量方向相同而长不等，其例外的情形是矢量乘以零给出一个零矢量；矢量乘以单位 1 则不变。图 1.3 给矢量 $\boldsymbol{b}$ 乘以标量 m 所给出的三种可能情况。

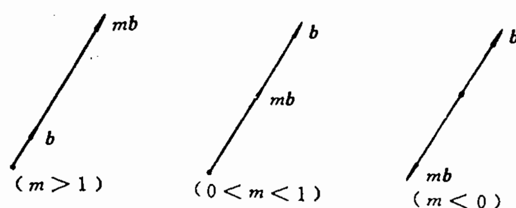


图 1.3

矢量与标量的积满足结合律和分配律(distributive rule)

$$m(n\boldsymbol{b}) = (mn)\boldsymbol{b} = n(m\boldsymbol{b}) \tag{1.4}$$

$$(m + n)\boldsymbol{b} = (n + m)\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{b} \tag{1.5}$$

$$m(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = m(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) = m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} \tag{1.6}$$

矢量乘以它的数值倒数给出与它同向的单位矢量(unit vector)

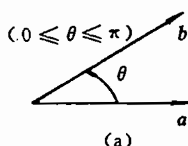
$$\hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}/b \tag{1.7}$$

1.1.2 矢量的点积与叉积

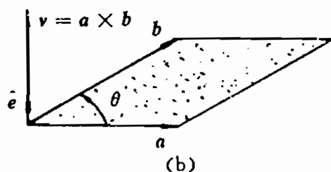
矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 点乘的结果称点积又称为标积(dot or scalar product)，这个积为标，以 λ 表示

$$\lambda = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = ab\cos\theta \tag{1.8}$$

中 θ 为这两个矢量夹角的较小者，见图 1.4(a)，矢量 $\boldsymbol{a}$ 同单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 的标积为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 方上的投影(projection)。



(a)



(b)

图 1.4

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 叉乘的结果称叉积或称作矢积(cross or vector product)，这个积为矢量，$\boldsymbol{v}$ 表示，它由下式给出

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = (ab\sin\theta)\hat{\boldsymbol{e}} \tag{1.9}$$

中 θ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间小于 π 的夹角；$\hat{\boldsymbol{e}}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所构成的平面，且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\hat{\boldsymbol{e}}$ 三个方成右手系。$\boldsymbol{v}$ 的大小等于以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，如图 1.4(b)所示的阴影部。叉乘不能交换。

三矢标积(scalar triple product)，又称混合积(mixed product)，又称箱积(box prod-

uct)，为

$$[abc] = a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c) = \lambda \tag{1.10}$$

λ 等于以 a、b、c 为邻边的平行六面体的体积。

三矢矢积(vector triple product)是这样两个矢量叉乘的结果：这两矢量之中一个又作为另外两个矢量的叉积。a 与 $b \times c$ 的叉积 w 存在如下的恒等式

$$w = a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \tag{1.11}$$

矢量 w 在 a 和 b 所构成的平面内。

1.3 并矢与并矢式

矢量 a 和 b 的不定矢积(indeterminate vector product)称作并矢(dyad)，它表成 ab，不定矢积一般不能交换：$ab \neq ba$，并矢的第一个矢量称作前项(antecedent)，第二个矢量称作后项(consequent)。并矢式(dyadic)$\mathbf{D}$ 对应一个二阶张量(tensor of order two)，它总可表成有限个并矢之和

$$\mathbf{D} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_Nb_N \tag{1.12}$$

当然，该式并不唯一。

如果将上式中的各并矢的前后项交换，给出的并矢式 $\mathbf{D}_c$ 称作 $\mathbf{D}$ 的共轭并矢式(conjugate dyadic)

$$\mathbf{D}_c = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_Na_N \tag{1.13}$$

如果在(1.12)式中的每个并矢均换成为两个矢量的点乘，所得到的标量称作并矢式 $\mathbf{D}$ 的标量，它写成

$$\mathbf{D}_s = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_N \cdot b_N \tag{1.14}$$

(在上式中 $\mathbf{D}_s$ 是个标量，本应将它写成一般斜体，但按习惯仍写成黑斜体。在后面亦会遇到类似情况)。

如果在(1.12)式中的每个并矢均由其两个矢量的叉乘代替，其结果称作并矢式 $\mathbf{D}$ 的矢量(vector of the dyadic)，它写成

$$\mathbf{D}_v = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \cdots + a_N \times b_N \tag{1.15}$$

不定矢积服从分配律

$$a(b + c) = ab + ac \tag{1.16}$$

$$(a + b)c = ac + bc \tag{1.17}$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \tag{1.18}$$

如果标量 λ 和 μ 与并矢相乘，则有

$$(\lambda + \mu)ab = \lambda ab + \mu ab \tag{1.19}$$

$$(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda ab \tag{1.20}$$

如果 v 是任一矢量，它与 $\mathbf{D}$ 的点积 $v \cdot \mathbf{D}$ 和 $\mathbf{D} \cdot v$ 为由下式定义的矢量 u 和 w

$$v \cdot \mathbf{D} = (v \cdot a_1)b_1 + (v \cdot a_2)b_2 + \cdots + (v \cdot a_N)b_N = u \tag{1.21}$$

$$\mathbf{D} \cdot v = a_1(b_1 \cdot v) + a_2(b_2 \cdot v) + \cdots + a_N(b_N \cdot v) = w \tag{1.22}$$

在(1.21)式中的 $\mathbf{D}$ 称作后因子(postfactor)，而(1.22)式的 $\mathbf{D}$ 称作前因子(prefactor)。如果对于每个矢量 v 有如下两式之一成立

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{D}=\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{E} \quad 或 \quad \mathbf{D}\cdot\boldsymbol{v}=\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.23}$$

则并矢式 **D** 和 **E** 相等。单位并矢式或称幂等因子(unit dyadic or idemfactor)**I**，它是以下式表示的并矢式

$$\mathbf{I}=\hat{e}_1\hat{e}_1+\hat{e}_2\hat{e}_2+\hat{e}_3\hat{e}_3 \tag{1.24}$$

其中 $\hat{e}_1$、$\hat{e}_1$、$\hat{e}_3$ 构成三维欧几里德空间的任一正交基(orthonormal basis)，见图 1.5。单位并矢式 **I** 对于所有的矢量 $\boldsymbol{v}$ 均有下式成立

$$\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{I}=\boldsymbol{v} \tag{1.25}$$

叉积 $\boldsymbol{v}\times\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{D}\times\boldsymbol{v}$ 是并矢式，它们分别定义如下

$$\boldsymbol{v}\times\mathbf{D}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{b}_1+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{b}_2+\cdots+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}_N)\boldsymbol{b}_N=\mathbf{F} \tag{1.26}$$

$$\mathbf{D}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{v})+\cdots+\boldsymbol{a}_N(\boldsymbol{b}_N\times\boldsymbol{v})=\mathbf{G} \tag{1.27}$$

并矢 $\boldsymbol{ab}$ 和 $\boldsymbol{cd}$ 的点积为下式所定义的并矢

$$\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{ad} \tag{1.28}$$

根据(1.28)式，任两个并矢式 **D** 和 **E** 的点积为如下所表示的并矢式 **G**

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}&=(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_N\boldsymbol{b}_N)\cdot(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{d}_2+\cdots+\boldsymbol{c}_N\boldsymbol{d}_N)\\&=(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{d}_1+(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{c}_2)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{d}_2+\cdots+(\boldsymbol{b}_N\cdot\boldsymbol{c}_N)\boldsymbol{a}_N\boldsymbol{d}_N\\&=\mathbf{G}\end{aligned} \tag{1.29}$$

对于并矢式 **D** 和 **E** 满足

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}=\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{I} \tag{1.30}$$

则称这两个并矢式互为可逆(reciprocal)。对于逆并矢式常使用如下写法

$$\mathbf{E}=\mathbf{D}^{-1} \quad 和 \quad \mathbf{D}=\mathbf{E}^{-1}$$

对于并矢 $\boldsymbol{ab}$ 和 $\boldsymbol{cd}$ 的双点积(double dot product)和双叉积(double cross product)定义如下

$$\boldsymbol{ab}:\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})=\lambda,\quad 标量 \tag{1.31}$$

$$\boldsymbol{ab}\overset{\times}{\cdot}\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})=\boldsymbol{h},\quad 矢量 \tag{1.32}$$

$$\boldsymbol{ab}\underset{\times}{\cdot}\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{g},\quad 矢量 \tag{1.33}$$

$$\boldsymbol{ab}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{uw},\quad 并矢 \tag{1.34}$$

根据这些定义，并矢式的双点积和双叉积也就确定了。当然亦有定义为如下形式的双点积

$$\boldsymbol{ab}\cdot\cdot\,\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})=\lambda,\quad 标量 \tag{1.35}$$

如果并矢式 **D** 有下式成立

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}_C \tag{1.36}$$

则称 **D** 为自共轭(self-conjugate)或对称(symmetric)。如果

$$\mathbf{D}=-\mathbf{D}_C \tag{1.37}$$

则称 **D** 为反自共轭(anti-self-conjugate)或反对称(anti-symmetric)。

每一个并矢式都可表成唯一的对称并矢式和反对称并矢式之和

$$\mathbf{D}=\frac{1}{2}(\mathbf{D}+\mathbf{D}_C)+\frac{1}{2}(\mathbf{D}-\mathbf{D}_C)=\mathbf{G}+\mathbf{H} \tag{1.38}$$

现在上式中 **G** 是对称的，而 **H** 是反对称的，因为

$$\mathbf{G}_C = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_C + (\mathbf{D}_C)_C) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_C + \mathbf{D}) = \mathbf{G} \tag{1.39}$$

$$\mathbf{H}_C = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_C - (\mathbf{D}_C)_C) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_C - \mathbf{D}) = -\mathbf{H} \tag{1.40}$$

关于唯一性可以这样确定：假定 $\mathbf{D}$ 还可分解成为另一种形式，即为对称的 $\mathbf{G}^*$ 与反对称的 $\mathbf{H}^*$ 之和

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}^* + \mathbf{H}^* \tag{1.41}$$

而据式(1.38)、(1.39)、(1.40)式，则有

$$\mathbf{D} = \mathbf{G} + \mathbf{H} = \mathbf{G}^* + \mathbf{H}^* \tag{1.42}$$

$$\begin{cases} \mathbf{D}_C = \mathbf{G}_C + \mathbf{H}_C = \mathbf{G} - \mathbf{H} \\ \mathbf{D}_C = \mathbf{G}_C^* + \mathbf{H}_C^* = \mathbf{G}^* - \mathbf{H}^* \end{cases} \tag{1.43}$$

故由以上三式推出

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{G} \tag{1.44}$$

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} \tag{1.45}$$

所以将 $\mathbf{D}$ 分解成对称的并矢式 $\mathbf{G}$ 和反对称的并矢式 $\mathbf{H}$ 存在且唯一。

1.4 坐标系

我们要表征一个矢量需要一个坐标系。原则上讲，坐标系可以任选，然而针对不同情况选取不同的坐标系却是有益的。通常，首选的坐标系是直角笛卡尔坐标系(rectangular Cartesian coordinate system)，简称：直角坐标系，它是由三个相互垂直的坐标轴构成的，如图 1.5 所示 $Oxyz$ 坐标系。

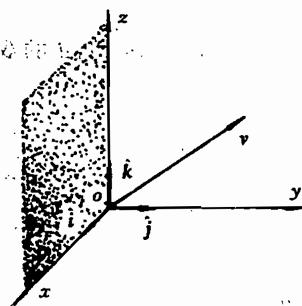


图 1.5

在 $Oxyz$ 中任何一个矢量 $\boldsymbol{v}$ 均可表成三个任意的非共面的非零矢量的线性组合，这样的三个矢量则称作基矢量(basis vectors)。对于取定的一组基矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，只要适当地选取标量 λ、μ、ν，就可将矢量 $\boldsymbol{v}$ 表成

$$\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{v} + \nu\boldsymbol{c} \tag{1.46}$$

由于假定这组基矢量是线性无关的，所以，若使

$$\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{v} + \nu\boldsymbol{c} = 0 \tag{1.47}$$

成立，只有

$$\lambda = \mu = \nu = 0 \tag{1.48}$$

在给定的坐标系中任何一组基矢量都可当成该坐标的一组基。不过，对于直角笛卡尔坐标系而言，最寻常的选择是将基矢量取成沿三个坐标轴的单位矢量 $\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$，如图 1.5 所示，这组基矢量构成一个右手系的单位矢量三基(unit vector triad)，对于它则有

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \tag{1.49}$$

$$\begin{cases} \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \end{cases} \tag{1.50}$$

这样的一组基矢量通常称作一个正交基(orthonormal basis)。

利用单位三基 $\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$，矢量 $\boldsymbol{v}$ 可表成

$$\boldsymbol{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \tag{1.51}$$

见图 1.6 所示，式中的三个分量（亦称笛卡尔分量）为

$$v_x = \boldsymbol{v} \cdot \hat{i} = v\cos\alpha \tag{1.52}$$

$$v_y = \boldsymbol{v} \cdot \hat{j} = v\cos\beta \tag{1.53}$$

$$v_z = \boldsymbol{v} \cdot \hat{k} = v\cos\gamma \tag{1.54}$$

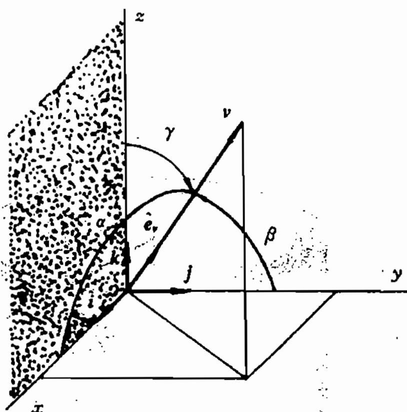


图 1.6

v_x、v_y、v_z 为 $\boldsymbol{v}$ 在坐标轴上的投影。据(1.7)式，$\boldsymbol{v}$ 方向的单位矢量 $\hat{e}_v$ 为

$$\hat{e}_v = \boldsymbol{v}/v = (\cos\alpha)\hat{i} + (\cos\beta)\hat{j} + (\cos\gamma)\hat{k} \tag{1.55}$$

由于 $\boldsymbol{v}$ 是任意的，从而得出任一单位矢量的方向余弦(direction cosines)均为该单位矢量的笛卡尔分量(Cartesian components)。

利用笛卡尔分量可将一些矢量运算表成分量形式，如对于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的点乘可化成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\end{aligned} \tag{1.56}$$

对于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的叉乘可表成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) \\ &= (a_yb_z - a_zb_y)\hat{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k}\end{aligned} \tag{1.57}$$

这个结果亦常表成行列式形式(determinant form)

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1.58}$$

对于三矢标积亦可写成行列式形式

$$[\boldsymbol{abc}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1.59}$$

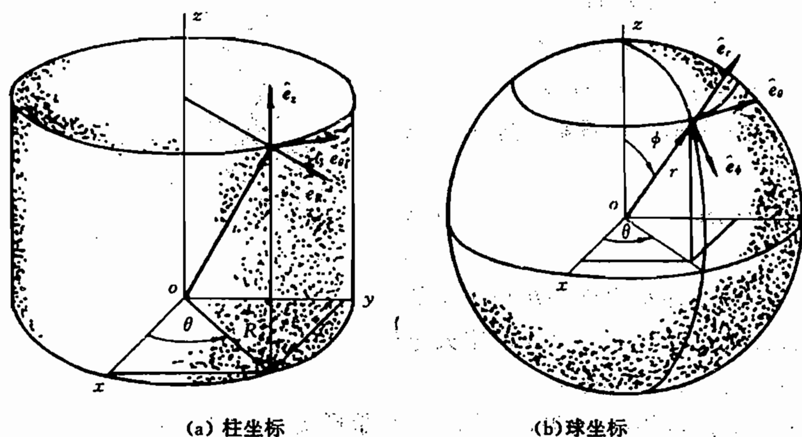
利用笛卡尔分量，并矢 $\boldsymbol{ab}$ 可表成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab} &= (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) \\ &= a_xb_x\hat{i}\hat{i} + a_xb_y\hat{i}\hat{j} + a_xb_z\hat{i}\hat{k} \\ &\quad + a_yb_x\hat{j}\hat{i} + a_yb_y\hat{j}\hat{j} + a_yb_z\hat{j}\hat{k} \\ &\quad + a_zb_x\hat{k}\hat{i} + a_zb_y\hat{k}\hat{j} + a_zb_z\hat{k}\hat{k}\end{aligned} \tag{1.60}$$

利用单位三基 $\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$，幂等因子可以表成

$$\mathbf{I} = \hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k} \tag{1.61}$$

除了上述的直角笛卡尔坐标系* 外，像图 1.7 所示的柱坐标系(R,θ,z)和球坐标系(r,θ,ϕ)等曲线坐标系也广泛地使用，在图 1.7 中给出这两种坐标系以及基矢量的单位三基$(\hat{e}_R,\hat{e}_\theta,\hat{e}_z)$和$(\hat{e}_r,\hat{e}_\theta,\hat{e}_\phi)$，但须注意，这两组单位三基的各自方向并不是固定不变，它们一般是位置的函数。



(a) 柱坐标　　(b) 球坐标

图 1.7

1.5　张量的指标表示法

任何阶次的张量本身或者说它的分量，均可用清楚简明的指标写法(indicial notation)表示。按照这种表示法，在表示张量的字母符号之上要加上“上标或下标”，如表示张量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、T、F、…可写成

$$a_i, b^j, T_{ij}, F_i{}^{\cdot j}, \cdots$$

对于混合形式的 $F_i{}^{\cdot j}$，在指标 j 之前加上“·”，这表示 j 为第二个指标。

在指标表示法的规则里，对于一个按指标写法的张量或张量项，其字母指标可能只出现一次，亦可能出现两次。当字母指标不重复出现时，该字母要在 $1,2,\cdots,N$ 的范围内取值，其中 N 为规定指标域(range of index)的确定整数。不重复出现的指标称作**自由指标**(free indices)，一个给定的张量或张量项，它的**张量阶则等于其指标写法中自由指标的个数**。同样，在一个正确写法的张量式中，对于每个项中作为自由指标的字母均应相同。

1.5.1　一般的求和约定

当在按指标写法的张量或张量项中，若有一个字母指标重复出现共两次，则该指标要取完指标域中所有的值，然后将所得的各项加起来，这个求和约定称作**爱因斯坦求和约定**(Eistein's summation convention)，在这个求和约定中重复的指标称作**哑标**(dummy indices)。作为一个张量项中的哑标，它们可用除该项中的自由指标以外的任何字母代替而不改变该项的意义。一般讲，在一个正确写法的张量项中不会有任何指标出现两次以上，如果为满意地表示某个量必须重复使用某些指标两次以上，则求和约定必须中止。

---

* 坐标系有多种写法，如对直角坐标系，有时写成 $x_1x_2x_3$；有时写成：(x_1,x_2,x_3)；亦有写成：x^i 等。

自由指标的个数和位置可直接表明按指标写法的那个量的确切张量性质，一阶张量由一个带有一个自由指标的字母符号表示，因此任何一个矢量 a 均可由一个带有一个"下标"或"上标"的字母符号表示，或者再加上一个括号表示*，即

$$a_i \quad 或 \quad a^i$$

或写成

$$(a_i) \quad 或 \quad (a^i)$$

对于只具有一个自由指标的如下各项式，亦作为一阶张量，即为

$$a_{ij}b_j, F_{ikk}, R^{p}_{\cdot qp}, \in_{ijk}u_jv_k$$

或写成

$$(a_{ij}b_j), (F_{ikk}), (R^{p}_{\cdot qp}), (\in_{ijk}u_jv_k)$$

二阶张量由带两个自由指标的字母符号表示，所以任何并矢式 **D** 都可按下述三种形式之一表示

$$D^{ij}, D_i^{\cdot j} \quad 或 \quad D^{i}_{\cdot j}, D_{ij}$$

或写成

$$\{D^{ij}\}, \{D_i^{\cdot j}\} \quad 或 \quad \{D^{i}_{\cdot j}\}, \{D_{ij}\}$$

在上述"混合形式"中 j 前加"·"，表示 j 为第二指标。二阶张量当然还可以其他不同形式出现，如

$$A_{ijip}, \ B^{ij}_{\cdot\cdot jk}, \ \delta_{ij}u_kv_k$$

或写成

$$\{A_{ijip}\}, \ \{B^{ij}_{\cdot\cdot jk}\}, \ \{\delta_{ij}u_kv_k\}$$

按照如上的逻辑，三阶张量则用带三个自由指标的字母符号表示。当然，不带有任何自由指标的字母符号则代表零阶张量即标量，如符号 λ。

在一般的物理空间中任一组基都是由三个非共面的矢量组成，因此在该空间中任一个矢量则由它的三个分量完全确定，于是在三维物理空间中表示一个矢量的 a_i 或 (a_i)，其指标的取值为 1、2、3。但须注意，在许多书（包括本书）中符号 a_i 有时代表矢量本身，有时代表该矢量的第 i 个分量。在指标域为 3 时，表示一个二阶张量（并矢式）**A** 的符号为 A_{ij} 或 $\{A_{ij}\}$，它共有 9 个分量，$\{A_{ij}\}$ 通常表成

$$\{A_{ij}\} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{1.62}$$

按同样方式，在三维空间中一阶张量 (a_i) 可表成一行或者一列

$$(a_i) = (a_1, a_2, a_3) \quad 或 \quad (a_i) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{1.63}$$

一般讲，对于指标域为 N 时，一个 n 阶张量将有 N^n 个分量。

---

* 在许多著作中表示一个矢量，如表示矢量 a，只用 a_i 或 a^i 即可。但本书有时为了将矢量（或张量）的本身同其分量明确分开，而使用括号，即加括号者表示矢量（或张量）本身，不加者表示一个分量。对一阶张量（矢量）加圆括号，对一阶以上张量加大括号。

采用指标写法可以把一个方程组缩写，例如对方程组

$$\begin{cases} x_1 = C_{11}z_1 + C_{12}z_2 + C_{13}z_3 \\ x_2 = C_{21}z_1 + C_{22}z_2 + C_{23}z_3 \\ x_3 = C_{31}z_1 + C_{32}z_2 + C_{33}z_3 \end{cases} \tag{1.64}$$

它可以写成带有两指标、指标域为 3 的指标形式方程

$$x_i = C_{ij}z_j \tag{1.65}$$

对于 i 和 j 的域为 2 的如下指标形式方程

$$A_{ij} = B_{ip}C_{jq}D_{pq} \tag{1.66}$$

它的展开形式为 4 个方程

$$\begin{cases} A_{11} = B_{11}C_{11}D_{11} + B_{11}C_{12}D_{12} + B_{12}C_{11}D_{21} + B_{12}C_{12}D_{22} \\ A_{12} = B_{11}C_{21}D_{11} + B_{11}C_{22}D_{12} + B_{12}C_{21}D_{21} + B_{12}C_{22}D_{22} \\ A_{21} = B_{21}C_{11}D_{11} + B_{21}C_{12}D_{12} + B_{22}C_{11}D_{21} + B_{22}C_{12}D_{22} \\ A_{22} = B_{21}C_{21}D_{11} + B_{21}C_{22}D_{12} + B_{22}C_{21}D_{21} + B_{22}C_{22}D_{22} \end{cases} \tag{1.67}$$

如果在(1.66)中 i 和 j 的指标域为 3，该式将表示 9 个方程，而每个方程的右边都有 9 项。

1.5.2 带有单位矢量的求和约定

现叙述另一种求和约定。这种求和约定同带有单位基矢量且按符号写法的矢量和张量有关，例如在直角笛卡尔坐标系中有任一个矢量 $\boldsymbol{v}$，它写成

$$\boldsymbol{v} = v_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + v_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + v_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{1.68}$$

其中 v_1 和 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$、v_2 和 $\hat{\boldsymbol{e}}_2$、v_3 和 $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ 分别为 $\boldsymbol{v}$ 在坐标 x_1、x_2、x_3 上的坐标和单位矢量。对上式采用求和约定，则该式可写成如下简缩形式

$$\boldsymbol{v} = v_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{1.69}$$

式中 i 为求和指标，在这里的写法除了求和约定的相加特点外，还有符号表征意义，在这种求和约定的写法中，张量的特征不再同纯指标写法那样由自由指标给出。

同样，二阶张量亦可按对诸指标基矢量求和的约定给出，于是按(1.53)写法给出的 $\boldsymbol{ab}$ 现可写成

$$\boldsymbol{ab} = (a_i\hat{\boldsymbol{e}}_i)(b_j\hat{\boldsymbol{e}}_j) = a_ib_j\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j \tag{1.70}$$

注意，在这种表示法中要注意基矢量的前后顺序。类似地，任一个并矢式 $\mathbf{D}$ 亦可写成缩写形式，即

$$\mathbf{D} = D_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j \tag{1.71}$$

1.6 坐标变换和一般张量

令 x^i 表示在三维欧几里德空间的任意坐标系 $x^1x^2x^3$，而令 θ^i 为该空间的另一其他坐标系 $\theta^1\theta^2\theta^3$。在这里，字母上的数字上标只是个标记，而不是指数；对 x 的幂次，有时为了区别一般的上标则加括号表示，如 x 的二次方、三次方则写成 $(x)^2$ 和 $(x)^3$，字母上标当然只起指标作用。从 x^i 坐标系中任一点 (x^1,x^2,x^3) 到 θ^i 坐标系中所对应坐标 $(\theta^1,\theta^2,\theta^3)$ 的坐标变换方程(coordinate transformation equations)为

$$\theta^i = \theta^i(x^1,x^2,x^3) \tag{1.72}$$

假定联系两组变量(坐标)的函数 θ^i 是单值、连续、可微的函数(single-valued, continu-

ous, differentiable functions),则存在着变换行列式 J

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\theta^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\theta^1}{\partial x^2} & \frac{\partial\theta^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\theta^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\theta^2}{\partial x^2} & \frac{\partial\theta^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\theta^3}{\partial x^1} & \frac{\partial\theta^3}{\partial x^2} & \frac{\partial\theta^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \tag{1.73}$$

该行列式的缩写形式为

$$J = \left| \frac{\partial\theta^i}{\partial x^j} \right| \tag{1.74}$$

这个函数变换行列式称作雅可比行列式(Jacobian or Jacobian determinant)。如果雅可比行列式不为零,(1.72)式具有唯一的一组逆变换

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \tag{1.75}$$

在(1.72)和(1.75)式中,由 x^i 和 θ^i 所表示的坐标系完全是任意的。它们可以是任意曲线坐标系,亦可为笛卡尔坐标系。

根据(1.72)式,在一点 P 的微分矢量(differential vector)$\mathrm{d}\theta^i$ 由下式给出

$$\mathrm{d}\theta^i = \frac{\partial\theta^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \tag{1.76}$$

如果在坐标变换下,一组与点 P 有关的量 b^i 按下式变换

$$b'^i = \frac{\partial\theta^i}{\partial x^j}b^j \tag{1.77}$$

则称 b^i 为一阶逆变张量的分量,在上式中偏导数(partial derivatives)是在 P 点取值的。在(1.77)式中 b^i 是 x^i 坐标系中张量的分量,b'^i 是在 θ^i 坐标系中的分量。在一般张量的理论中,逆变张量(contravariant tensors)使用上标标记,因此在这里坐标写成 x^i 而不用 x_i。

将(1.77)式所表达的张量概念推广,可定义二阶逆变张量,对于这样的张量,则要求其分量服从如下变换规律:

$$B'^{ij} = \frac{\partial\theta^i}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial\theta^j}{\partial x^s}B^{rs} \tag{1.78}$$

三阶逆变张量、四阶逆变张量以及更高阶的逆变张量可以按类似方式定义。

与逆变张量相对应的为协变张量(covariant tensors)。在一般张量理论中,协变张量使用下标标记。协变张量的标准型是坐标的标量函数的偏导数,如果 $\phi=\phi(x^1,x^2,x^3)$ 是这样的函数,则有

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta^i} = \frac{\partial\phi}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial\theta^i} \tag{1.79}$$

一般讲,如果一组量 b_i 按下式变换

$$b'_i = \frac{\partial x^j}{\partial\theta^i}b_j \tag{1.80}$$

在上式中 b'_i 是在 θ^i 坐标系中的协变分量,b_i 为在 x_i 坐标系中的分量。二阶协变张量服从如下变换规律

$$B'_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^s}{\partial \theta^j} B_{rs} \tag{1.81}$$

当然，可以按同样方式定义更高阶张量和混合张量(mixed tensors)，例如

$$T'^{r}_{\cdot sp} = \frac{\partial \theta^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \theta^s} \frac{\partial x^q}{\partial \theta^p} T^{m}_{\cdot nq} \tag{1.82}$$

1.7 笛卡尔张量

1.7.1 度量张量和笛卡尔张量

令 x^i 为欧几里德三维空间的直角笛卡尔坐标系，而 θ^i 为该空间的任一直角坐标系或曲线坐标系(如柱坐标和球坐标)。具有笛卡尔分量 x^i 的矢量 $\boldsymbol{x}$，称作直角笛卡尔坐标系中任一点 $P(x^1, x^2, x^3)$ 的**位置矢量**(position vector)。两个相邻点 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 之间微元距离 $\mathrm{d}s$ 的平方由下式给出

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^i \tag{1.83}$$

利用联系两个坐标系的坐标系变换式

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \tag{1.84}$$

可得距离微分

$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} \mathrm{d}\theta^p \tag{1.85}$$

于是(1.83)式可表成

$$(\mathrm{d}s)^2 = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} \mathrm{d}\theta^p \mathrm{d}\theta^q = g_{pq} \mathrm{d}\theta^p \mathrm{d}\theta^q \tag{1.86}$$

其中 g_{pq} 为二阶张量 $\{g_{pq}\}$ 的分量

$$g_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q}$$

$\{g_{pq}\}$ 称作**空间度量张量**(spatial metric tensor)。如果 θ^i 代表直角笛卡尔坐标系，即将 θ^i 看成 x'^i 坐标系，则如上的 g_{pq} 成为

$$g_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x'^q} = \delta_{pq} \tag{1.87}$$

在这里 δ_{pq} 为**克罗内克尔符号**(Kronecker delta)，它的定义是：若 $p=q$ 时 $\delta_{pq}=1$，若 $p \neq q$ 时 $\delta_{pq}=0$，即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ，对于\ i = j \\ 0 & ，对于\ i \neq j \end{cases} \tag{1.88}$$

距离微元之平方取(1.83)式形式的任何坐标系均称作**齐次坐标系**(system of homogeneous coordinates)；两个齐次坐标系之间的坐标变换为**正交变换**(orthogonal transformation)，在正交变换下所定义的张量称作**笛卡尔张量**(Cartesian tensor)，特别对于具有共同原点的两个直角笛卡尔坐标系之间的变换所定义的张量正属于这种情况。对于笛卡尔张量而言，其逆变分量和协变分量之间没有差别，因此习惯上在**表达笛卡尔张量的表达式中仅使用下标**。以下将指出，在所定义笛卡尔张量的变换规律中，原在一般张量定义中出现的偏导数(如(1.80)和(1.81)式中那样)将由常数代替。

1.7.2 笛卡尔张量的变换规律和正交条件

令 $Ox_1x_2x_3$ 和 $Ox_1'x_2'x_3'$ 为两个直角笛卡尔坐标系，它们以图 1.8 所示的一点 O 为共同原点，带撇"′"的坐标系可看作不带撇的坐标系绕原点将坐标轴旋转而得来，亦可是将不带撇坐标系以一个坐标平面反射而得到，或者看作是原坐标系的旋转加反射。如果符号 a_{ij}表示带撇的第 i 轴与不带撇的第 j 轴之间夹角的余弦，亦即带撇坐标系中的第 i 个基矢量 $\hat{e}_i'$ 与不带撇坐标系中的第 j 个基矢量 $\hat{e}_j$ 的点积

$$a_{ij} = \hat{e}_i' \cdot \hat{e}_j = \cos(x_i', x_j) \tag{1.89.1}$$

于是，一个坐标系的各个坐标轴相对另一个坐标系各轴的方位(orientation)由表 1 给出，亦可由变换张量 **A** 方便地给出，**A** 为

表 1

	x_1	x_2	x_3
x_1'	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x_2'	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x_3'	a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$\mathbf{A} = a_{ij}\hat{e}_i'\hat{e}_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.89.2}$$

注意 **A** 的基矢量，在这里我们采用 $\hat{e}_i'\hat{e}_j$(我们认为这种写法比较合理)。而一般的书上均写成 $\hat{e}_i\hat{e}_j$，即将 **A** 表成 $\mathbf{A}=a_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$，这种写法，如果不涉及基矢量时没有问题，例如在用矩阵或指标形式表示它的时候，可用它换算张量或矢量在新老坐标系中之分量的关系，像在下面的(1.94)式和(1.104)式所做那样。然而，当写出在这变换中的张量或矢量的基矢量时就会发现问题，例如对于矢量 $\boldsymbol{v}$，它在老坐标系中它表成 $\boldsymbol{v}=v_i\hat{e}_i$，它在新坐标系中表成 $\boldsymbol{v}'=v_i'\hat{e}_i'$。当然，$\boldsymbol{v}=v_i\hat{e}_i\equiv v_j'\hat{e}_i'=\boldsymbol{v}'$。若按 $\mathbf{A}=a_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$ 写法来换算该矢量的分量，则有

$$\boldsymbol{v}' = v_i'\hat{e}_i' \equiv \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{v} = a_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j\cdot v_k\hat{e}_k = a_{ij}v_j\hat{e}_i$$

由上显然推不出(1.95.2)式的结果。如果 **A** 按(1.89.2)式，则有

$$\boldsymbol{v}' = v_i'\hat{e}_i' \equiv \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{v} = a_{ij}\hat{e}_i'\hat{e}_j\cdot v_k\hat{e}_k = a_{ij}v_j\hat{e}_i'$$

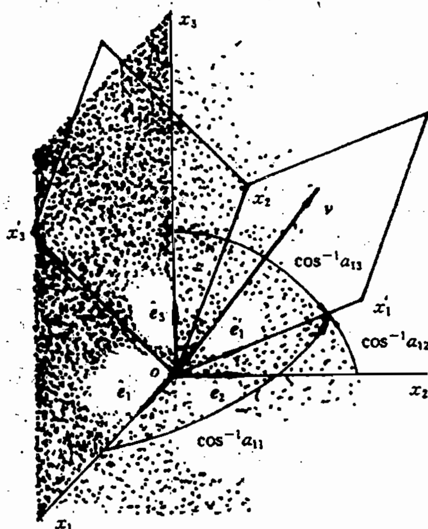


图 1.8

从而给出(1.95.2)式的结果。因此 **A** 应采用(1.89.2)式的写法。

根据 a_{ij}的定义并按照(1.48)式及求和的约定，沿 x_1' 轴的单位矢量 $\hat{e}_1'$ 可由下式给出

$$\hat{e}_1' = a_{11}\hat{e}_1 + a_{12}\hat{e}_2 + a_{13}\hat{e}_3 = a_{1j}\hat{e}_j$$

同理，可以给出任一单位基矢量 $\hat{e}_i'$

$$\hat{e}_i' = a_{ij}\hat{e}_j \tag{1.90}$$

任一矢量 $\boldsymbol{v}$ 在不带撇坐标系中按分量形式表成(参见图 1.8)

$$\boldsymbol{v} = v_j\hat{e}_j \tag{1.91}$$

$\boldsymbol{v}$ 在带撇的坐标系中表成(为了表明 $\boldsymbol{v}$ 是在带撇坐标系中表示的,将 $\boldsymbol{v}$ 写成 $\boldsymbol{v}'$):

$$\boldsymbol{v}' = v_i'\hat{e}_i' \tag{1.92}$$

将(1.90)式代进上式中给出(这时 $\boldsymbol{v}'$ 又换成在不带撇坐标系中表示,故 $\boldsymbol{v}'\to\boldsymbol{v}$)

$$\boldsymbol{v} = v_i'a_{ij}\hat{e}_j \tag{1.93}$$

将(1.91)式同(1.93)式对比,则给出矢量 $\boldsymbol{v}$ 在两个坐标系中之分量间的关系为

$$v_j = a_{ij}v_i' \tag{1.94.1}$$

或

$$\boldsymbol{v} = v_j\hat{e}_j \equiv \mathbf{A}_c\cdot\boldsymbol{v}' = a_{ij}\hat{e}_j\hat{e}_i'\cdot v_k'\hat{e}_k' = a_{ij}v_i'\hat{e}_j \tag{1.94.2}$$

上式为一阶笛卡尔张量的变换规律,它亦可看成是由(1.80)和(1.77)式所表示的一阶张量变换之普遍形式的特例。交换如上给出的带撇基矢量和不带撇基矢量的位置,则求得(1.94)式的逆变关系式为

$$\boldsymbol{v}' = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.95.1}$$

或写成

$$v_i' = a_{ij}v_j \tag{1.95.2}$$

要注意,在(1.94.1)式中 a_{ij} 的自由指标是第二个,而在(1.95.2)式中 a_{ij} 的自由指标却是第一个。

适当地选择哑标,可将(1.94)式和(1.95)式组合成如下关系式

$$v_j = a_{ij}a_{ik}v_k \tag{1.96}$$

由于矢量 $\boldsymbol{v}$ 是任意的,(1.96)式则必须能化成 $v_j\equiv v_j$ 恒等式,因此依赖下标 j 和 k 的系数 $a_{ij}\cdot a_{ik}$ 必须要等于 1 或 0。这要根据 $j=k$ 或 $j\neq k$ 两种情况,即 $a_{ij}a_{ik}$ 可由(1.88)式所示的克罗内克尔符号表示

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \tag{1.97}$$

上式的展写形式是方向余弦 a_{ij} 的 9 个方程,这组方程称作 a_{ij} 的**正交条件**(orthogonality or orthonormality conditions)。同样,将(1.94)和(1.95)联立起来可以推出

$$v_i' = a_{ij}a_{kj}v_k'$$

由该式推出正交条件作为另一种形式

$$a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik} \tag{1.98}$$

满足(1.97)式和(1.98)式的线性变换,如(1.94)式和(1.95)式,称作**正交变换**。坐标轴旋转和以一个坐标平面将坐标轴反射都会导致正交变换。

克罗内克尔符号有时称作**代换算子**(substitution operator),这是由于

$$\delta_{ij}b_j = \delta_{i1}b_1 + \delta_{i2}b_2 + \delta_{i3}b_3 = b_i \tag{1.99}$$

$$\delta_{ij}F_{ik} = \delta_{1j}F_{1k} + \delta_{2j}F_{2k} + \delta_{3j}F_{3k} = F_{jk} \tag{1.100}$$

从这个性质清楚地看出 $\{\delta_{ij}\}$ 是由(1.54)式给出的幂等因子 $\mathbf{I}$ 的指标形式。

根据变换规律(1.95)式,并矢 $\{u_iv_j\}$ 在带撇坐标系中的分量由下式给出

$$u_i'v_j' = (a_{ip}u_p)(a_{jq}v_q) = a_{ip}a_{jq}u_pv_q \tag{1.101}$$

将(1.101)式推广,任何二阶笛卡尔张量 $\{T_{ij}\}$ 服从如下的分量变换规律

$$\mathbf{T}' = T_{ij}'\hat{e}_i'\hat{e}_j' = \mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}_c = a_{im}\hat{e}_i'\hat{e}_m\cdot T_{pq}\hat{e}_p\hat{e}_q\cdot a_{jn}\hat{e}_n\hat{e}_j' = a_{ip}a_{jq}T_{pq}\hat{e}_p'\hat{e}_q' \tag{1.102.1}$$

即有 $$T'_{ij} = a_{ip}a_{iq}T_{pq} \tag{1.102.2}$$

借助于正交条件，可以简单地推出(1.102)式的逆变形式，从而给出从带撇的分量到不带撇的分量的变换规则

$$T_{ij} = a_{pi}a_{qj}T'_{pq} \tag{1.103.1}$$

或 $$\mathbf{T} = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{A} \tag{1.103.2}$$

将一阶笛卡尔张量和二阶笛卡尔张量的变换推广到 N 阶笛卡尔张量，则给出

$$T'_{ijk\cdots} = a_{ip}a_{jq}a_{km}\cdots T_{pqm\cdots} \tag{1.104}$$

注意，表示张量变换的式(1.102.1)或式(1.103.2)似乎与张量的不变性"矛盾"。其实不然，二者完全一致。作为张量不变性，当然有

$$T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_3 = \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}' = T'_{ij}\hat{e}'_i\hat{e}'_j$$

虽然 $\mathbf{T}\equiv\mathbf{T}'$，但二者分属两个坐标系中表示，基矢量与分量均不同。而

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_C$$

这是一种换算关系，它实现一个张量从 x_i 坐标系表示的形式(以 $\hat{e}_i$ 为基矢量)换算成 x'_i 坐标系表示的形式(以 $\hat{e}'_i$ 为基矢量)。这种换算关系恰恰是根据张量的不变性。

1.8 张量的运算

1.8.1 笛卡尔张量相加与标量相乘

同阶的笛卡尔张量相加(或相减)，可按如下所示的规则，即将其分量与分量相加(或相减)

$$A_{ijk\cdots} \pm B_{ijk\cdots} = T_{ijk\cdots} \tag{1.105}$$

其和张量$\{T_{ijk\cdots}\}$与$\{B_{ijk\cdots}\}$和$\{A_{ijk\cdots}\}$同阶。注意，在上式各项中同样指标按同样顺序出现。

张量与标量相乘是这样：将标量乘以其张量的每个分量，结果给出一个同阶新张量。例如一个标量 λ 乘以一个张量所得到的新张量，按指标和抽象符号写法如下

$$(b_i) = (\lambda a_i) \quad 或 \quad \boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a} \tag{1.106}$$

$$\{B_{ij}\} = \{\lambda A_{ij}\} \quad 或 \quad \mathbf{B} = \lambda\mathbf{A} \tag{1.107}$$

1.8.2 张量相乘

任一阶次的两个张量外积(outer product)给出一个新张量，这个张量的每个分量都是由一个张量的分量乘另一个张量的分量组成，该张量的阶次等于那两个相乘张量的阶次之和。如下给出一些典型外积的例子：

(a). $(a_i)(b_j) = \{a_ib_j\} = \{T_{ij}\}$

(b). $(v_i)\{F_{jk}\} = \{v_iF_{jk}\} = \{a_{ijk}\}$

(c). $\{D_{ij}\}\{T_{km}\} = \{D_{ij}T_{km}\} = \{\Phi_{ijkm}\}$

(d). $\{\in_{ijk}\}(v_m) = \{\in_{ijk}v_m\} = \{\Theta_{ijkm}\}$

从上面的例子看出，张量的外积就是将相乘的各张量简单地并置起来。(注意，并矢就是按这种方式将两个矢量并置起来。)

张量对于其两个自由指标的缩并(contraction)是这样进行的：令其两个自由指标成为同样的字母指标，即变成哑标。缩并给出的张量比原张量少两个阶次，缩并的代表例子

如下：

(a). 张量$\{T_{ij}\}$和$\{u_iv_j\}$的缩并，给出新张量

$$\{T_{ij}\} \rightarrow T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$\{u_iv_j\} \rightarrow u_iv_i = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

(b). 张量$\{E_{ij}a_k\}$的缩并，给出新张量有三种

$$(E_{ij}a_j) = (b_i)$$

$$(E_{ij}a_i) = (c_j)$$

$$(E_{ii}a_k) = (d_k)$$

(c). $\{E_{ij}F_{km}\}$缩并给出六种可能的张量，按其分量则有

$$E_{ij}F_{im} = G_{jm} \quad , \quad E_{ij}F_{ki} = H_{jk}$$

$$E_{ii}F_{km} = K_{km} \quad , \quad E_{ij}F_{kk} = P_{ij}$$

$$E_{ij}F_{jm} = Q_{im} \quad , \quad E_{ij}F_{kj} = R_{ik}$$

两个张量的**内积**(inner product)是这样的一种缩并：先做这两个张量的外积，然后从并置的两个张量中各取出一个自由指标令其相同。表2列出了对连续介质力学重要的几组张量的内外积，按指标形式和抽象符号形式两种表示。

表 2

张量	外积		内积	
	指标形式	抽象符号形式	指标形式	抽象符号形式
$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$	$\{a_ib_j\}$	$\boldsymbol{ab}$	a_ib_i	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a},\mathbf{E}$	$\{a_iE_{jk}\}$	$\boldsymbol{a}\mathbf{E}$	$(a_iE_{ik})=(f_k)$	$\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{E}=\boldsymbol{f}$
	$\{E_{jk}a_i\}$	$\mathbf{E}\boldsymbol{a}$	$(a_iE_{ji})=(h_j)$	$\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{h}$
$\mathbf{E},\mathbf{F}$	$\{E_{ij}F_{km}\}$	$\mathbf{EF}$	$\{E_{ij}F_{jm}\}=\{G_{im}\}$	$\mathbf{E}\cdot\mathbf{F}=\mathbf{G}$
$\mathbf{E},\mathbf{E}$	$\{E_{ij}E_{km}\}$	$\mathbf{EE}$	$\{E_{ij}F_{jm}\}=\{B_{im}\}$	$\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}=(\mathbf{E})^2=\mathbf{B}$

当然，有时亦使用四阶和四阶以上的张量多重缩并，例如

$$\mathbf{EF},\{E_{ij}F_{km}\} \xrightarrow{\text{缩并成}} \mathbf{E}:\mathbf{F}, E_{ij}F_{ij}$$

$$\mathbf{EEE},\{E_{ij}E_{km}E_{pq}\} \xrightarrow{\text{缩并成}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = (\mathbf{E})^3, \{E_{ij}E_{jm}E_{mq}\}$$

为了按指标写法表示叉乘$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，需要引进一个三阶张量$\{\in_{ijk}\}$，$\in_{ijk}$称作**置换符号**(permutation symbol)或称**交错张量**(alternating tensor)，它的定义是

$$\in_{ijk} = \begin{cases} 1 \ , & \text{当} i、j、k \text{是} 1、2、3 \text{的偶排列时} \\ -1 \ , & \text{当} i、j、k \text{是} 1、2、3 \text{的奇排列时} \\ 0 \ , & \text{当} i、j、k \text{中有取值相同者} \end{cases}$$

i、j、k的取值范围均为1、2、3，当它们取值为偶排列时，即按图9(a)所示的顺序12312；当它们取值为奇排列时，即按图9(b)所示的顺序32132。

根据$\in_{ijk}$的定义，可以将叉乘$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$表成按指标写法的形式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\rightarrow(\in_{ijk}a_jb_k)=(c_i) \tag{1.108}$$

利用这个关系式可将混合积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\lambda$写成

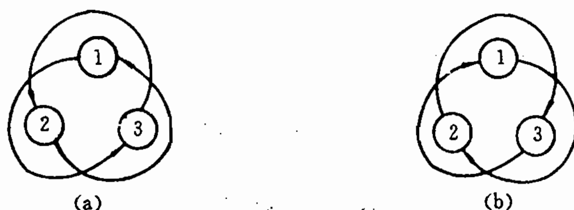


图 1.9

$$\lambda = \in_{ijk} a_i b_j c_k \tag{1.109}$$

由于这个混合积正是由(1.52)式所示的行列式的值，所以常在表示 3×3 形式的行列式的值时，使用置换符号$\in_{ijk}$。

值得注意，$\{\in_{ijk}\}$服从三阶笛卡尔张量的变换规律，只要变换是本征变换(proper transformation)，即 $\det a_{ij}=1$，通过坐标轴旋转所产生的变换正是这种变换。如果变换为非本征的(improper transformation)，即 $\det a_{ij}=-1$，例如将坐标轴按一个坐标平面反射，使得由右手坐标系变成左手坐标系，这时在$\{\in_{ijk}\}$变换时必须加上一个负号，这样的张量称作伪张量(pseudo-tensor)。

任一个二阶笛卡尔张量$\{T_{ij}\}$的对偶矢量或称反串矢量(dual vector)$\boldsymbol{\nu}$ 由下式定义

$$\boldsymbol{\nu} = (v_i) = (\in_{ijk} T_{jk}) \tag{1.110}$$

它可以看成是由(1.15)式所定义的“并矢式 T 的矢量”$\mathbf{T}_v$ 及其指标形式。

1.8.3 二阶张量的主值和主方向

假设 **T** 是个二阶张量，如果有一个方向 $\hat{n}$，使得下式成立，这个 $\hat{n}$ 向就称作 **T** 的主方向(principal deriction)。

$$\mathbf{T} \cdot \hat{n} = \lambda \hat{n} \quad 或 \quad T_{ij} n_j = \lambda n_i \tag{1.111.1}$$

λ 为标量，它称为 **T** 的主值(principal value)。将上式改写成

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}) n_j = (\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) \cdot \hat{n} = 0 \tag{1.111.2}$$

上式中的 n_j 若为非平凡解(untrivial solution)，则应有

$$|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = \det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{1.112.1}$$

即有

$$-\lambda^3 + \mathrm{I}_T\lambda^2 - \mathrm{II}_T\lambda + \mathrm{III}_T = 0$$

或写成

$$\lambda^3 - \mathrm{I}_T\lambda^2 + \mathrm{II}_T\lambda - \mathrm{III}_T = 0 \tag{1.112.2}$$

其中

$$\begin{cases} \mathrm{I}_T = T_{ii} = \mathrm{tr}\mathbf{T} \\ \mathrm{II}_T = \dfrac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}^2\mathbf{T} - \mathrm{tr}\mathbf{T}^2) \\ \mathrm{III}_T = |T_{ij}| = \det\mathbf{T} \end{cases} \tag{1.112.3}$$

上式中 I_T、II_T、III_T 称为 **T** 的第一、第二和第三不变量(first, second and third invariants)，式(1.112.1)一般可以解出三个主值和三个不同的主方向。如果二阶张量 **T**

是对称的，则主值为实数且三个主方向相互垂直，详细分析，见 2.5 节和 2.6 节。

1.8.4 张量的幂

m 个相同张量的内积称作张量的幂(power of tensors)，例如

$$\overbrace{\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}\cdot\cdots\cdot\mathbf{T}}^{m}=\mathbf{T}^m \tag{1.113}$$

如果 $\mathbf{T}$ 为二阶张量且有

$$\mathbf{T}\cdot\hat{n}=\lambda\hat{n}$$

则 $\mathbf{T}^m$ 的主方向为 $\hat{\mathbf{n}}$、主值为 λ^m，即

$$\mathbf{T}^m\cdot\hat{n}=\lambda^m\hat{n}$$

1.8.5 张量的函数和导数

自变量(independent variable)为张量的函数称为张量函数，张量函数可能为标量、矢量或张量，如

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{T})$$

如果 $\mathbf{F}$ 为三阶张量、$\mathbf{T}$ 为二阶张量，则其导数为五阶张量，即

$$\mathbf{F}'=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{T}}\quad 或\quad F'_{ijkmn}=\frac{\partial F_{ijk}}{\partial T_{mn}} \tag{1.114}$$

1.8.6 二阶张量的逆张量·哈尔密尔顿—凯雷方程

如 $\det\mathbf{T}\neq 0$，则这个二阶张量有逆张量(inverse tensor)$\mathbf{T}^{-1}$，它满足

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{I}\quad 或\quad T_{ik}T_{kj}^{-1}=\delta_{ij} \tag{1.115}$$

解上式的最后一式，可以得到

$$\mathbf{T}^{-1}=\left(\frac{\partial\det\mathbf{T}}{\partial\mathbf{T}}\right)_c\Big/\det\mathbf{T} \tag{1.116.1}$$

或表成分量形式

$$T_{ij}^{-1}=\left(\frac{\partial\det\mathbf{T}}{\partial T_{ij}}\right)_c\Big/\det\mathbf{T} \tag{1.116.2}$$

受上式逆张量表达式的启发，亦可通过求 $\det\mathbf{T}$ 的张量导数求得 $\mathbf{T}^{-1}$。为此，先造一个张量函数(tensor function)

$$\mathbf{P}=\mathbf{T}+\eta\mathbf{C}$$

即有

$$\det\mathbf{P}=\det(\mathbf{T}+\eta\mathbf{C}) \tag{1.117.1}$$

其中 $\mathbf{C}$ 是个任取定的二阶张量，η 为一个标量变量。现对如上标量函数求 $\left.\frac{\partial}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}$：

(1)

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\det\mathbf{P}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}&=\left(\frac{\partial\det\mathbf{P}}{\partial\mathbf{P}}:\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}\\&=\left.\frac{\partial\det\mathbf{P}}{\partial\mathbf{P}}\right|_{\eta=0}:\mathbf{C}=\frac{\partial\det\mathbf{T}}{\partial\mathbf{T}}:\mathbf{C}\\&=\frac{\partial\det\mathbf{T}}{\partial T_{ij}}C_{ij}=\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial\det\mathbf{T}}{\partial\mathbf{T}}\right)_c\cdot\mathbf{C}\right]\end{aligned} \tag{1.117.2}$$

(2) 仍对(1.117.1)式求导，但做法与上不同，具体地

$$\left.\frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}=\left.\frac{\partial \det(\mathbf{T}+\eta \mathbf{C})}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}$$

$$=\left.\frac{\partial \det\left[\eta \mathbf{T}\cdot\left(\frac{1}{\eta}\mathbf{I}+\mathbf{T}^{-1}\cdot \mathbf{C}\right)\right]}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} \tag{1.117.3}$$

在上式中令 $\lambda=-\frac{1}{\eta}$、$\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{B}$，则上式写成

$$\left.\frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}=\left.\frac{\partial \det[\eta \mathbf{T}\cdot(\mathbf{B}-\lambda \mathbf{I}]}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}$$

$$=\left.\frac{\partial}{\partial \eta}[\det(\eta \mathbf{T})\cdot\det(B-\lambda \mathbf{I})]\right|_{\eta=0} \tag{1.117.4}$$

根据(1.112.1)式和(1.112.2)式，上式中的两个行列式分别表成

$$\det(\mathbf{B}-\lambda \mathbf{I})=-\lambda^3+\mathrm{I}_B\lambda^2-\mathrm{II}_B\lambda+\mathrm{III}_B=\frac{1}{\eta^3}+\mathrm{I}_B\frac{1}{\eta^2}+\mathrm{II}_B\frac{1}{\eta}+\mathrm{III}_B$$

和

$$\det(\eta \mathbf{T})=\eta^3\det \mathbf{T}$$

将以上两式代进(1.117.4)中，则有

$$\left.\frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}=\left.\frac{\partial}{\partial \eta}[(\det \mathbf{T})(1+\mathrm{I}_B\eta+\mathrm{II}_B\eta^2+\mathrm{III}_B\eta^3)]\right|_{\eta=0}$$

$$=(\det \mathbf{T})\left.\frac{\partial}{\partial \eta}(1+\mathrm{I}_B\eta+\mathrm{II}_B\eta^2+\mathrm{III}_B\eta^3)\right|_{\eta=0}=\mathrm{I}_B\det \mathbf{T}$$

$$=(\mathrm{tr}\mathbf{B})(\det \mathbf{T})=[\mathrm{tr}(\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{C})](\det \mathbf{T})$$

$$=\mathrm{tr}[(\det \mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{C})]=\mathrm{tr}[(\det \mathbf{T})\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{C}] \tag{1.117.5}$$

将(1.117.2)与(1.117.5)式比较，并考虑到 $\mathbf{C}$ 是任取的，则有

$$\mathbf{T}^{-1}=\left(\frac{\partial \det \mathbf{T}}{\partial \mathbf{T}}\right)_c\Big/\det \mathbf{T} \tag{1.118.1}$$

亦即

$$\frac{\partial \det \mathbf{T}}{\partial \mathbf{T}}=(\mathbf{T}^{-1})_c\det \mathbf{T}=(\mathbf{T}_c)^{-1}\det \mathbf{T} \tag{1.118.2}$$

式(1.118.1)的结果同式(1.116.1)完全一样，殊途同归。

如下推导一个方程。仍设 $\mathbf{T}$ 为二阶张量，并造一个函数

$$\mathbf{P}=\mathbf{T}-\lambda \mathbf{I}$$

其中 λ 是个任意标量。现求 $\det \mathbf{P}=\det(\mathbf{T}-\lambda \mathbf{I})$ 的张量导数

$$\frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial \mathbf{T}}=\frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial \mathbf{P}}:\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{T}}=\frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial P_{ij}}\frac{\partial P_{ij}}{\partial \mathbf{T}}=\frac{\partial \det \mathbf{P}}{\partial \mathbf{P}}$$

$$=(\mathbf{P}_c)^{-1}\det \mathbf{P}=[(\mathbf{T}-\lambda \mathbf{I})_c]^{-1}\det(\mathbf{T}-\lambda \mathbf{I})$$

将上式改写，并且两边同时乘以 $\mathbf{I}$，则有

$$[\det(\mathbf{T}-\lambda \mathbf{I})]\mathbf{I}=(\mathbf{T}-\lambda \mathbf{I})_c\cdot\frac{\partial \det(\mathbf{T}-\lambda \mathbf{I})}{\partial \mathbf{T}}\cdot\mathbf{I}$$

将 $\det(\mathbf{T}-\lambda \mathbf{I})$ 展写开，上式则表成

$$(-\lambda^3+\lambda^2 \mathrm{I}_T-\lambda \mathrm{II}_T+\mathrm{III}_T)\mathbf{I}=(\mathbf{T}_c-\lambda\mathbf{I})\cdot\left(\lambda^2\frac{\partial \mathrm{I}_T}{\partial \mathbf{T}}-\lambda\frac{\partial \mathrm{II}_T}{\partial \mathbf{T}}+\frac{\partial \mathrm{III}_T}{\partial \mathbf{T}}\right)$$

在上式中 λ 是任取的，如若该式永远成立，则 λ 的各幂次项的系数应相等，应有

$$\frac{\partial \mathrm{I}_T}{\partial \mathbf{T}}=\mathbf{I},\quad \frac{\partial \mathrm{II}_T}{\partial \mathbf{T}}=\mathrm{I}_T\mathbf{I}-\mathbf{T}_c$$

$$\mathrm{II}_T\mathbf{I}-\mathrm{I}_T\mathbf{T}_c+\mathbf{T}_c^2=\frac{\partial \mathrm{III}_T}{\partial \mathbf{T}}=\mathrm{III}_T(\mathbf{T}_c)^{-1}$$

上式可改写成

$$\mathbf{T}_c^3-\mathrm{I}_T\mathbf{T}_c^2+\mathrm{II}_T\mathbf{T}_c-\mathrm{III}_T\mathbf{I}=0$$

$$\mathbf{T}^3-\mathrm{I}_T\mathbf{T}^2+\mathrm{II}_T\mathbf{T}-\mathrm{III}_T\mathbf{I}=0 \tag{1.119}$$

上式便是著名哈密尔顿—凯雷方程或称定理(Hamilton-Cayley equation or theorem)。

1.8.7 若干关系式(公式)

① $(\mathbf{T}^{-1})^{-1}=\mathbf{T}$ (1.120.1)

证明 因$(\mathbf{T}^{-1})\cdot(\mathbf{T}^{-1})^{-1}\equiv\mathbf{I}$，将该式两边前点乘以 $\mathbf{T}$，则有

$$\mathbf{T}\cdot[(T^{-1})\cdot(\mathbf{T}^{-1})^{-1}]\equiv\mathbf{T}\cdot\mathbf{I}$$

从而有

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^{-1}\cdot(\mathbf{T}^{-1})^{-1}=(\mathbf{T}^{-1})^{-1}\equiv\mathbf{T}$$

② $(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})^{-1}=\mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{T}^{-1}$ (1.120.2)

证明 因$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})^{-1}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})\equiv\mathbf{I}$，将上式两边先后点乘 $\mathbf{S}^{-1}$和 $\mathbf{T}^{-1}$，则有

$$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})^{-1}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})\cdot\mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{T}^{-1}\equiv\mathbf{I}\cdot\mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{T}^{-1}$$

即有

$$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})^{-1}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{T}^{-1}\equiv\mathbf{S}^{-1}\cdot\mathbf{T}^{-1}$$

③ $\det\mathbf{T}^{-1}=\dfrac{1}{\det\mathbf{T}}$ (1.120.3)

证明 因 $\mathbf{I}\equiv\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^{-1}$，对该式取行列式，则有

$$1=\det\mathbf{I}\equiv\det(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^{-1})=(\det\mathbf{T})(\det\mathbf{T}^{-1})$$

④ $(\mathbf{T}_c)^{-1}=(\mathbf{T}^{-1})_c$ (1.120.4)

证明 据(1.118.1)式，则有：$(\mathbf{T}^{-1})_c=\left(\dfrac{\partial\det\mathbf{T}}{\partial\mathbf{T}}\right)\Big/\det\mathbf{T}$，再令 $\mathbf{T}=\mathbf{T}_c$ 代进(1.118.1)式，则给：$(\mathbf{T}_c)^{-1}=\left(\dfrac{\partial\det\mathbf{T}_c}{\partial\mathbf{T}_c}\right)_c\Big/\det\mathbf{T}_c$，因 $\det\mathbf{T}_c=\det\mathbf{T}$，$\left(\dfrac{\partial\det\mathbf{T}_c}{\partial\mathbf{T}_c}\right)_c=\left(\dfrac{\partial\det\mathbf{T}}{\partial\mathbf{T}}\right)$，从而推出$(\mathbf{T}_c)^{-1}=(\mathbf{T}^{-1})_c$，即取逆符号与取共轭符号可以交换。

⑤ $(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})_c=\mathbf{S}_c\cdot\mathbf{T}_c$ (1.120.5)

证明 从略(按指标写法即可证明)。

1.9 笛卡尔张量的矩阵表示

1.9.1 对于一般的笛卡尔张量

将诸元素按矩形排列并加上方括号，而且这个组成服从一定组合规律，这样的组成称作矩阵(matrix)。$M\times N$ 矩阵是个具有 M 行 N 列元素的矩阵。在一个表示矩阵 $\mathscr{A}$ 的元

素的符号 A_{ij} 中，其第一下标表示该元素所占据的行，第二下标表示该元素所占据的列。矩阵 $\mathscr{A}$ 本身则可用 A_{ij} 加一个方括号表示。对于 $M\times N$ 矩阵 $\mathscr{A}$ 可表成

$$\mathscr{A} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{MN} \end{bmatrix} \tag{1.121}$$

对于 $M=N$ 的矩阵称作方阵(square matrix)；$1\times N$ 矩阵写成 $[a_{1k}]$，它称作行阵(row matrix)；$M\times 1$ 矩阵写成 $[a_{k1}]$，它称作列阵(column matrix)；只以零为元素的矩阵称零矩阵(zero matrix)；除了主对角形上的元素($A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{NN}$)外其他处的元素均为零的方阵称作对角矩阵(diagonal matrix)，如果令对角矩阵的非零元素为 1，这个矩阵称作单位矩阵(unit matrix)。将 $M\times N$ 的矩阵 $\mathscr{A}$ 的行与列交换，所得到的 $N\times M$ 的矩阵 $\mathscr{A}^T$ 称作 $\mathscr{A}$ 的转置矩阵(transpose matrix)。

具有相同行数和相同列数的矩阵可以按对应的元素相加(或相减)。矩阵 $[A_{ij}]$ 乘以标量 λ 给出的矩阵为 $[\lambda A_{ij}]$。只要 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是可乘矩阵(conformable matrix)，即前项矩阵因子 $\mathscr{A}$ 的列数等于后项矩阵因子 $\mathscr{B}$ 的行数的条件下，就可定义这两个矩阵的积 $\mathscr{A}\mathscr{B}$，$M\times P$ 矩阵乘以 $P\times N$ 矩阵给出 $M\times N$ 矩阵，矩阵相乘可简单地将抽象符号并置在一起来表示，即

$$\mathscr{A}\mathscr{B} = C \quad \text{或} \quad [A_{ij}][B_{jk}] = [A_{ij}B_{jk}] = [C_{ik}]$$

一般讲，矩阵相乘是不能交换的，即

$$\mathscr{A}\mathscr{B} \neq \mathscr{B}\mathscr{A}$$

其行列式 $|A_{ij}|$ 为零的方阵 $\mathscr{A}$ 称作奇矩阵(singular matrix)。方阵 $\mathscr{A}$ 的元素 A_{ij} 的余因子(cofactor)由 A_{ij}^{*} 表示，它定义作

$$A_{ij}^{*} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

上式中 M_{ij} 是 $[A_{ij}]$ 的余子式(minor)，即 M_{ij} 是在 $[A_{ij}]$ 的 i 行和 j 列消去后所留下的方阵的行列式。$\mathscr{A}$ 的伴随矩阵(adjoint matrix)$[A_{ji}^{*}]$ 这样求得：用 $\mathscr{A}$ 的余因子代替它的每个元素，然后交换其行与列便得到伴随矩阵。如果方阵 $\mathscr{A}=[A_{ij}]$ 是非奇矩阵，则 $\mathscr{A}$ 具有唯一的逆矩阵(inverse matrix)$\mathscr{A}^{-1}$，它定义作 $\mathscr{A}$ 的伴随矩阵除以 $\mathscr{A}$ 的行列式，即

$$\mathscr{A}^{-1} = \frac{[A_{ji}^{*}]}{|\mathscr{A}|} = [A_{ij}^{-1}] \tag{1.222}$$

根据逆矩阵的上述定义，可以证明

$$\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^{-1} = \mathscr{I}$$

其中 $\mathscr{I}$ 为单位矩阵或恒等矩阵(identity matrix)，它除了主对角线全为 1 外其余的元素全为零，之所以如此称呼是因为如下性质

$$\mathscr{I}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{I} = \mathscr{A}$$

显然 $\mathscr{I}$ 是克罗内克尔符号 δ_{ij} 和单位并矢式 $\mathbf{I}$ 的矩阵表示。满足 $\mathscr{A}^T=\mathscr{A}^{-1}$ 条件的矩阵 $\mathscr{A}$ 称作正交矩阵(orthogonal matrix)。于是若 $\mathscr{A}$ 是正交矩阵，则有

$$\mathscr{A}^T\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^T = \mathscr{I}$$

由于任何一个并矢式均可表成(1.53)式所示的九项形式，或者根据任一个二阶张量

的分量都可表成(1.62)式的方阵排列，因此用 3×3 方阵来表示二阶张量是非常有用的。而一阶张量(矢量)可用一个 1×3 的行阵或者用一个 3×1 的列阵表示。虽然每个二阶或二阶以下的笛卡尔张量(并矢式、矢量和标量)可用矩阵表示，但并不是每个矩阵都表示一个张量。

如果在积 $\mathscr{C}=\mathscr{A}\mathscr{B}$ 中的两个矩阵都是表示二阶张量的 3×3 矩阵，则乘积 $\mathscr{C}$ 等价于两个张量的内积，按指标写法则有

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\{A_{ij}\}\{B_{jk}\}=\{A_{ij}B_{jk}\}=\{C_{ik}\}$$

上式中的指标域为 3，它的展写形式是这样地不断重复两个矩阵的行与列相乘：将前项矩阵因子的第 i 行各元素依次乘以后项矩阵因子的第 k 列各元素，然后把这些乘积加起来便是积矩阵 $\mathscr{C}$ 的第 i 行第 k 列的那个元素。

如下给出在连续介质力学中经常出现的以矩阵形式表示的张量运算。

(a). 矢量点乘

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\\ a_ib_i=b_ia_i=\lambda\\ [a_{1j}][b_{j1}]=[\lambda]\\ [a_1,a_2,a_3]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=[a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3]=[\lambda]\end{cases}\tag{1.123.1}$$

(b). 矢量与并矢式点乘

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{E}=\boldsymbol{b}\qquad (a_i)\{E_{ij}\}=(a_iE_{ij})=(b_j)\\ a\mathscr{E}=\mathscr{B}\qquad [a_{1i}][E_{ij}]=[b_{1j}]\\ [a_1,a_2,a_3]\begin{bmatrix}E_{11}&E_{12}&E_{13}\\E_{21}&E_{22}&E_{23}\\E_{31}&E_{32}&E_{33}\end{bmatrix}=\\ \begin{bmatrix}a_1E_{11}+a_2E_{21}+a_3E_{31}\\a_1E_{12}+a_2E_{22}+a_3E_{32}\\a_1E_{13}+a_2E_{23}+a_3E_{33}\end{bmatrix}\end{cases}\tag{1.123.2}$$

(c). 并矢式与矢量点乘

$$\begin{cases}\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\qquad \{E_{ij}\}(a_j)=(E_{ij}a_j)=(c_i)\\ \mathscr{E}a=\mathscr{C}\qquad [E_{ij}][a_{j1}]=[c_{i1}]\\ \begin{bmatrix}E_{11}&E_{12}&E_{13}\\E_{21}&E_{22}&E_{23}\\E_{31}&E_{32}&E_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\\ \begin{bmatrix}a_1E_{11}+a_2E_{12}+a_3E_{13}\\a_1E_{21}+a_2E_{22}+a_3E_{23}\\a_1E_{31}+a_2E_{32}+a_3E_{33}\end{bmatrix}\end{cases}\tag{1.123.3}$$

在上各式中 $a_{11}=a_1,a_{21}=a_2,a_{31}=a_3;b_{11}=b_1,b_{12}=b_2,b_{13}=b_3;c_{11}=c_1,c_{21}=c_2,c_{31}=c_3$。

1.9.2 对于对称张量

按照(1.36)式(或(1.37)式),如果并矢式 **D** 等于它的共轭式 $\mathbf{D}_c$(或等于$-\mathbf{D}_c$),则称 **D** 是对称的(或反对称的)。同样,如果二阶张量$\{D_{ij}\}$是对称的,则有

$$\{D_{ij}\} = \{D_{ji}\}$$

如果二阶张量是反对称的,则有

$$\{D_{ij}\} = -\{D_{ji}\}$$

因此仿照(1.38)式,可把二阶张量分成对称和反对称两部分,按其分量则有

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji}) + \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji}) \tag{1.124}$$

由于交换一个二阶张量的两个指标等价于交换表示它的矩阵的行与列,因此,如果一个方阵 $\mathscr{A}$ 等于它的转置矩阵 $\mathscr{A}^T$,则该方阵是对称的。对于对称的 3×3 矩阵 $\mathscr{A}$,它只有六个分量是独立的,如下所示

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{1.125}$$

一个反对称矩阵等于其负的转置矩阵,因此对于 3×3 的反对称矩阵 $\mathscr{B}$,它的主对角线上的分量全为零,其非主对角线上的分量也只有三个是独立的,如下所示

$$\mathscr{B} = -\mathscr{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ -B_{12} & 0 & B_{23} \\ -B_{13} & -B_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.126}$$

当然,张量的对称性质还可推广到二阶以上的张量。对于高阶张量,如果交换它的一对自由指标,其对应的分量不变,则称它对这对指标是对称的。例如张量 **R**,若其分量满足

$$R_{ijkm} = R_{ikjm}$$

则称 **R** 是对于指标 j 和 k 是对称的。

至于本书用到的其他一些张量知识将在以后叙述。

二　场论初步

1.10　场与场的几何表示

1.10.1　场的分类

场论(theory of fields)不但对于理论物理重要，而且对于连续介质力学亦十分重要，因为在连续介质力学中经常碰到各种不同的场(field)，如密度场、速度场、应力场等等。这些场有的属于标量，有的属于矢量或张量。所谓场，在数学上是指定义在空间某个区域内的函数。如果所定义的函数为标量，则称为标量场(scalar field)；如果所定义的函数为矢量或张量则称为矢量场(vector field)，或张量场(tensor field)。当然按数学上的抽象定义，标量场、矢量场均属于张量场，这里之所以分别称呼是为了研究方便和强调它们的个性。

场，定义为空间的函数，但它们还可能是时间的函数，如密度场 ρ 和速度场 $\boldsymbol{v}$，在分析上可以表成如下形式

$$\rho = \rho(\boldsymbol{r},t) = \rho(x,y,z,t) \tag{1.127}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{v}(x,y,z,t) \tag{1.128}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为空间点的矢径(radius vector)或称位置矢量(position vector)，x、y、z 为 $\boldsymbol{r}$ 在直角坐标系中的坐标分量，t 为时间。当然，我们有时亦用 $\boldsymbol{x}$ 代替 $\boldsymbol{r}$。

如果在同一时刻场内各点函数的值都相等，则称该场为均匀场(homogeneous field)；反之，为不均匀场(inhomogeneous field)。如果场内的函数与时间无关，则称该场为定常场(steady field)，反之，为不定常场(*unsteady field*)。

1.10.2　场的几何表示

场可以用作图的方法从几何上表示，这不但便于直观理解，而且往往具有实际意义，如在气象预报上的应用。

例如，对于一个标量场 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$，在每个时刻都能做出场 φ 的几何图形，如果在每个时刻该场的几何表示场已知，则整个情况也就清楚了，因此需要研究在某个固定时刻 t_0 场 $\varphi(\boldsymbol{r},t_0)$ 的几何作图(如果问题是定常的，只研究 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 本身即可)。令

$$\varphi(\boldsymbol{r},t_0) = \text{const} = \varphi_0 \tag{1.129}$$

将如上函数作图所得到的曲面称为等位面(equipotential surface)，在等位面上 φ 的取值都相等。在(1.129)中 φ_0 的取值不同，所给出的等位面也不同，于是便可得到一系列对应不同 φ_0 值的等位面，见图 1.10。

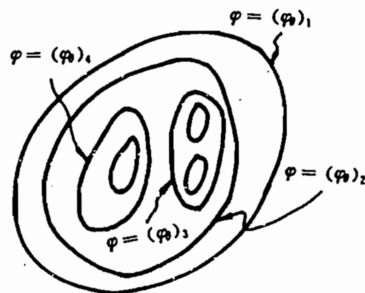


图 1.10

作出等位面之后，便可从等位面的相互位置、它的疏密程度看出标量函数的变化情况，例如等位面靠得近的地方函数变化得就快，靠得远的地方其函数变化变慢；而函数值从一个等位面变化到另一个等位面，其变化率最快的方向是等位面

的法线方向；沿等位面切线方向变化率为零，即函数值不变。

等位面在气象学上有重要应用，例如气候图上的等压线、等温线等都是标量场的等位面。

对于一个矢量场，它的几何表示比标量场复杂，因为矢量既具有大小又有方向，从而需要把它的大小和方向分开来作几何图形，对于矢量的大小可以用上述的等位面概念作图表示；，而对于矢量的方向则采用矢量线作图表示。

所谓矢量线(vector curve)是这样的线：其线上每一点的切线方向都与该点的矢量方向重合。具体做法是：在某个时刻如在 P_1 点，作出该点的矢量 $\boldsymbol{v}_1$；然后在矢量线 $\boldsymbol{v}_1$ 上取一个靠近 P_1 点的点 P_2，在 P_2 点上作出该点的矢量 $\boldsymbol{v}_2$；再在 $\boldsymbol{v}_2$ 上再取一个靠近 P_2 点的点 P_3，在 P_3 点上作出该点的矢量 $\boldsymbol{v}_3$；……。如此继续下去我们便得一条折线 $P_1P_2P_3P_4\cdots$，见图 1.11，该折线的每一段线段都与该点的矢量方向一致。如果令线段 $\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$、…的长度趋于零，则得到一条极限曲线，在该曲线上的每个点其切线方向都与该点上的矢量方向重合。按定义，它就是所考虑时刻的一条矢量线。当然，在该矢量所定义的空间区域可以作出无数条这样的曲线；同时，不同时刻过同一空间点上的矢量线也是不同的。

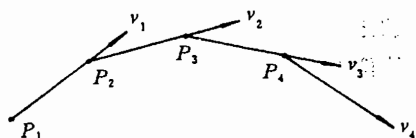


图 1.11

在数学上，某个时刻矢量线的方程表成

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \tag{1.130}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是矢量线的切线微元，如上方程在直角坐标系中可以表成

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x(x,y,z,t)} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y(x,y,z,t)} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z(x,y,z,t)} \tag{1.131}$$

其中

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

1.11 梯度

如上我们研究了标量场与它的几何表示——等位面，现研究标量函数 φ 在空间区域中的变化。

在 $t=t$ 时刻，函数 φ 在 P 点

$$\varphi = \varphi(P,t) = \varphi(\boldsymbol{r},t)$$

现求在该时刻 φ 沿某个方向 s 的变化(s 为过 P 点的某条曲线 s 的切线方向)，在无限靠近 P 点附近沿 s 方向取一动点 P'，见图 1.12，函数 φ 在 P' 点

$$\varphi = \varphi(P',t) = \varphi(\boldsymbol{r}',t)$$

于是在 P 点沿 s 线的导数

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim_{\overline{PP'} \to 0} \frac{\varphi(P',t) - \varphi(P,t)}{\overline{PP'}} \tag{1.132}$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial s}$称作沿曲线 s 的方向导数(directional derivative)。显然,过 P 点的曲线方向不同,其方向导数就不同。

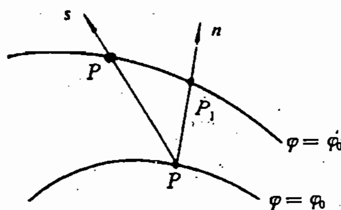


图 1.12

过空间点 P 有无穷多个方向,而每个方向都对应一个方向导数,即存在着无穷个方向导数。然而这些方向导数之间并不独立,存在着一定的函数关系。如下来推导这种关系,过 P 点作等位面(见图 1.12)

$$\varphi(P,t)=\varphi(r,t)=\varphi_0$$

过 P 点作该等位面的法线 n,它指 φ 增加方向。过图 1.12 的 P' 点作等位面

$$\varphi(P',t)=\varphi(r',t)=\varphi_0'$$

该曲面与 n 交于点 P_1,由于 P_1 和 P' 同在这个等位面上,所以

$$\varphi(P',t)=\varphi(P_1,t)$$

在 P 点沿 n 的方向导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial n}&=\lim_{\overline{PP_1}\to 0}\frac{\varphi(P_1,t)-\varphi(P,t)}{\overline{PP_1}}\\&=\lim_{\overline{PP_1}\to 0}\frac{\varphi(P',t)-\varphi(P,t)}{\overline{PP_1}}\end{aligned}\tag{1.133}$$

从图 1.12 可以看出,当 P' 点非常靠近 P 时,则有

$$\overline{PP_1}=\overline{PP'}\cos(n,s)\tag{1.134}$$

将(1.132)、(1.133)、(1.134)式联系起来则推出

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos(n,s)\tag{1.135}$$

由此看出,s 方向上的方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial s}$可以由$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$及 s 与 n 之间夹角的余弦表示出来,所以只要求得 P 点在 n 方向的$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$后,其任何方向的方向导数就利用(1.135)式完全确定了。

现在定义一个矢量——梯度(gradient),对于标量 φ 的梯度以 $\mathrm{grad}\varphi$ 表示,它的大小等于$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$、方向为 n 向,即

$$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\hat{n}\tag{1.136}$$

其中
$$\hat{n}=n/n,\quad \hat{n}=(n_1,n_2,n_3)\tag{1.137}$$

它描写了 P 点邻域内函数 φ 的变化状况,它是标量场不均匀性的量度。令 $\hat{s}$ 为 s 向的单位矢量,即

$$\hat{s}=s/|s|\tag{1.138}$$

从(1.135)～(1.138)式则推出

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\hat{s}\cdot\mathrm{grad}\varphi\tag{1.139}$$

即 s 方向的方向导数等于梯度矢量在该方向的投影。从(1.135)或(1.139)式可以看出，方向导数在 $\boldsymbol{n}$ 方向的值最大，即 φ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向变化最快；而在等位面的切线方向的方向导数等于零，即沿等位面 φ 的值不变。

现在求梯度在直角坐标系中的表达式。将式(1.139)中的 s 取成 x 向，即

$$s = x \quad , \quad \hat{s} = \hat{i}$$

于是从(1.139)式推出

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \hat{i}\cdot \mathrm{grad}\varphi \tag{1.140}$$

同理

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \hat{j}\cdot \mathrm{grad}\varphi \tag{1.141}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \hat{k}\cdot \mathrm{grad}\varphi \tag{1.142}$$

式(1.140)、(1.141)、(1.142)便是梯度在直角坐标系中的 x、y、z 轴上的投影量，即 $\mathrm{grad}\varphi$ 在直角坐标系中表成

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k} \tag{1.143}$$

梯度的主要性质概括起来为：

① 梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 描写了场内任一点 P 之邻域内函数 φ 的变化状态况，它是标量场不均匀性的量度；

② 梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 的方向与等位面的法线重合，并指向 φ 增加的方向，其大小是 $\boldsymbol{n}$ 向的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$；

③ 梯度矢量 $\mathrm{grad}\varphi$ 在任一方向上的投影等于该方向的方向导数；

④ 梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 的方向，即等位面的法线方向，亦是函数 φ 变化最快的方向；

⑤ 梯度在直角坐标系中的表达式为(1.143)式，在曲线坐标系中与此不同(将在后面给出)。

以下叙述非常有用的与梯度有关的两个定理：

定理 1　标量函数 φ 的空间微分 $\mathrm{d}\varphi$ 满足

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{grad}\varphi \tag{1.144}$$

反之，若 $\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{v}$ 必然等于 $\mathrm{grad}\varphi$。

证明　函数 φ 对空间的全微分，在直角坐标系中为

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1.145}$$

而据(1.143)式以及 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在直角坐标系中的表达式，有

$$\begin{cases}\mathrm{grad}\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\hat{i} + \mathrm{d}y\hat{j} + \mathrm{d}z\hat{k}\end{cases} \tag{1.146}$$

从而推出(1.145)式的结果，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}\varphi$$

即(1.144)式得到证明。反过来若已知

$$d\varphi = d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}$$

将该式与(1.144)式相减，则得到

$$d\boldsymbol{r} \cdot (\mathrm{grad}\varphi - \boldsymbol{v}) = 0$$

由于 $d\boldsymbol{r}$ 是任取的，故有

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\varphi$$

于是定理得到证明。

定理 2 若 $\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\varphi$，且 φ 是矢径 $\boldsymbol{r}$ 的单值函数，则沿任一条封闭曲线 L 的积分为

$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{1.147}$$

反之，若矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿任一条封闭曲线积分为零，即满足上式，则 $\boldsymbol{v}$ 必为某一标量函数 φ 的梯度，即有

$$\mathrm{grad}\varphi = \boldsymbol{v}$$

证明 因 $\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\varphi$，则根据上面的定理则有

$$d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{grad}\varphi = d\varphi$$

于是有

$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_L d\varphi$$

由于 φ 是 $\boldsymbol{r}$ 的单值函数，L 是封闭曲线，故有

$$\oint_L d\varphi = 0$$

从而推出

$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

反过来，若矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿任一条封闭曲线 L 的积分为零，证明 $\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\varphi$。

首先证明，$\boldsymbol{v}$ 的线积分与积分路线无关，为此任取空间两点 P_0 和 P，见图 1.13，在 P_0 和 P 之间任连两条曲线 $\widehat{P_0mP}$ 和 $\widehat{P_0nP}$。封闭曲线 L

$$L = \widehat{P_0nP} + \widehat{P_0mP}$$

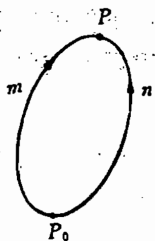


图 1.13

而已知线积分

$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\widehat{P_0nP}} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\widehat{PmP_0}} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

即有

$$\int_{\widehat{P_0nP}} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\widehat{PmP_0}} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{P_0mP} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$$

由于 $\widehat{P_0mP}$ 和 $\widehat{P_0nP}$ 是任取的，即从 P_0 点到 P 点的积分沿任一条路线都相同，即积分与路线无关，它只与 P_0 点和 P 点有关，所以从 P_0 点到任一点 P 的线积分若以 φ 表示，可写成

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{r}, t) = \int_{P_0}^{P} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

从而得到

$$\mathrm{d}\varphi = \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

根据定理 1 则推出

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\varphi$$

于是定理证毕。

定理 1 和定理 2 反映了梯度的同一个性质，定理 1 是微分形式，而定理 2 是积分形式。这两个定理将单值函数 φ 的梯度和 φ 的全微分以及线积分联系起来，而全微分及线积分的运算和性质是大家所熟悉的。因此，就有可能利用定理 1 和定理 2，通过全微分和线积分来求函数 φ 的梯度以及研究梯度的某些性质。

现举计算函数梯度的例子。

例 设标量函数 φ 只与矢径的大小 r 有关，求梯度 gradφ。

根据函数 φ 的性质，求 gradφ 有几种方法：

(1) 直接求梯度。根据

$$\varphi = \varphi(r) \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.148}$$

所以求得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$$

根据梯度在直角坐标系中的表达式(1.146)，则有

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\left(\frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j} + \frac{z}{r}\hat{k}\right) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r, \text{为 } r \text{ 向的单位矢量}$$

(2) 根据等位面的形状来求梯度。由于函数 φ 只与 r 有关，所以 φ 的等位面是以坐标原点为中心的球面，球面的法线就是矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向，而梯度 gradφ 的大小当然等于 $\varphi'(r)$

$$\varphi'(r) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$$

于是得到

$$\mathrm{grad}\varphi = \varphi'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \varphi'(r)\hat{\boldsymbol{r}}$$

(3) 根据定理 1 来求 gradφ. 因为

$$\mathrm{d}\varphi = \varphi'(r)\mathrm{d}r = \varphi'(r)\frac{r\mathrm{d}r}{r} \tag{1.149}$$

而

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = r^2$$

将上式微分，则求得

$$\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = r\mathrm{d}r$$

于是(1.149)式可以写成

$$\mathrm{d}\varphi = \varphi'(r)\frac{\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{r} \qquad (1.150)$$

而据定理1,有

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (1.151)$$

将(1.150)和(1.151)式相比较,则得到

$$\mathrm{grad}\varphi = \varphi'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \varphi'(r)\hat{\boldsymbol{r}}$$

最后应该指出,写成$\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\varphi$的矢量场亦称位势场(potential field),而φ称作位势函数(potential function)。

1.12 通量、散度、奥高定理、无源场

现给定一矢量场$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$,在场内取一个曲面$S$(见图1.14),它可以是封闭的也可以是不封闭的。在S面上某一点P上取个小面元$\mathrm{d}S$,在P点作单位法线$\hat{\boldsymbol{n}}$,若曲面是封闭的,$\hat{\boldsymbol{n}}$取外法线方向;若曲面不封闭,则可约定某一方向为法线正向。在P点的$\boldsymbol{v}$在曲面S上的法向投影v_n为

$$\begin{aligned} v_n &= \boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \\ &= v_x\cos(\hat{\boldsymbol{n}},x) + v_y\cos(\hat{\boldsymbol{n}},y) + v_z\cos(\hat{\boldsymbol{n}},z) \end{aligned} \qquad (1.152)$$

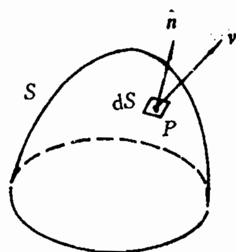


图1.14

矢量$\boldsymbol{v}$在面元$\mathrm{d}S$上的**通量**(flux)为

$$\mathrm{d}\mathscr{F} = v_n\mathrm{d}S$$

穿过整个曲面S的通量

$$\mathscr{F} = \int_S \mathrm{d}\mathscr{F} = \int_S v_n\mathrm{d}S \qquad (1.153)$$

面元矢量(vector of a surface element)定义作

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}} \qquad (1.154)$$

面元矢量$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$在直角坐标轴上的分量$\mathrm{d}S_x$、$\mathrm{d}S_y$、$\mathrm{d}S_z$为

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_x = \mathrm{d}S\cos(\hat{\boldsymbol{n}},x) \\ \mathrm{d}S_y = \mathrm{d}S\cos(\hat{\boldsymbol{n}},y) \\ \mathrm{d}S_z = \mathrm{d}S\cos(\hat{\boldsymbol{n}},z) \end{cases} \qquad (1.155)$$

于是通量$\mathscr{F}$可以表成

$$\begin{aligned} \mathscr{F} &= \int_S v_n\mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \int_S [v_x\cos(\hat{\boldsymbol{n}},x) + v_y\cos(\hat{\boldsymbol{n}},y) + v_z\cos(\hat{\boldsymbol{n}},z)]\mathrm{d}S \end{aligned} \qquad (1.156)$$

当S是封闭曲面时,通量积分写成

$$\mathscr{F} = \oint_S v_n\mathrm{d}S \qquad (1.157)$$

现在定义一个量——散度(divergence)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S v_n \mathrm{d}S}{V} \tag{1.158}$$

其中 V 为以一点为内心的空间体积,S 为该体积的外表面。散度当然是一个不依赖坐标系选择的标量。

假若矢量 $\boldsymbol{v}$ 的坐标分量 v_x、v_y、v_z 具有连续的一阶偏导数,则(1.158)式右边的极限存在。根据奥高定理(Остроградский—Gauss' theorem)(该定理又称高斯散度定理(divergence theorem of Gauss)

$$\begin{aligned}\oint_S v_n \mathrm{d}S &= \oint_S [v_x\cos(\boldsymbol{n},x) + v_y\cos(\boldsymbol{n},y) + v_z\cos(\boldsymbol{n},z)]\mathrm{d}S \\ &= \int_V\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{1.159}$$

将上式代进(1.158)式中并取体积分的中值,则推出

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{v} &= \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S v_n \mathrm{d}S}{V} \\ &= \lim_{V\to 0}\frac{\int_V\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V}{V} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1.160}$$

这样,我们便证明了(1.158)式所决定的极限值确实存在。但要注意,(1.160)式是散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ 在直角坐标系中的表达式,在曲线坐标系中它取另外形式。

将 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ 在直角坐标系中的表达式(1.160)代入(1.159)中,得到如下不依赖于坐标系选择的奥高公式(Остроградский—Gauss' formula)

$$\oint_S v_n \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V \tag{1.161}$$

矢量 $\boldsymbol{v}$ 满足 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$ 的场称作无源场(field without a source)或管式场。无源场具有以下主要性质:

① 无源矢量 $\boldsymbol{v}$ 经过矢量管任一横截面上的通量保持不变。

所谓矢量管(vector tube),就是在场内取任意条封闭曲线 L,通过 L 上的每一点做 $\boldsymbol{v}$ 的矢量线,这些矢量线所围成的区域则称为矢量管。如果矢量 $\boldsymbol{v}$ 为流速,其流体流动的区域是条管道,则这个管道就是流速 $\boldsymbol{v}$ 的矢量管。

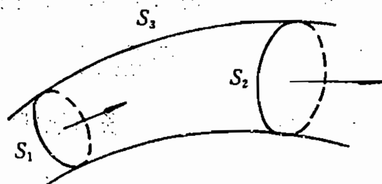


图 1.15

给定一个矢量管,如图 1.15 所示,任取该矢量管的两个横截面 S_1 和 S_2,这两

个截面所截管壁的面积为 S_3，则 S_1、S_2、S_3 构成封闭曲面 S，即

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

S 所围成的体积为 V。对 S 和 V 使用奥高定理，有

$$\oint_S v_n \mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}V$$

由于矢量场无源，故

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$$

因此推出

$$\oint_S v_n \mathrm{d}S = 0$$

即

$$\oint_S v_n \mathrm{d}S = \int_{S_1} v_n \mathrm{d}S + \int_{S_3} v_n \mathrm{d}S + \int_{S_2} v_n \mathrm{d}S = 0$$

由于在矢量管的壁上 $v_n \equiv 0$，所以如上积分化成

$$\int_{S_1} v_n \mathrm{d}S + \int_{S_2} v_n \mathrm{d}S = 0$$

如果将 S_1 面上的法线取成内法线，上式则变成

$$\int_{S_1} v_n \mathrm{d}S = \int_{S_2} v_n \mathrm{d}S$$

上式说明，矢量 $\boldsymbol{v}$ 经过矢量管的任一截面其通量保持不变。

② 矢量管不能在场内发生或终止。一般讲，它只能延伸至无穷，靠在区域边界上或者自成封闭管路。这个性质是上一性质的推论，因为若矢量管在场内发生或终止，则容易证明第一个性质不能保持。

③ 无源矢量 $\boldsymbol{v}$ 经过张于一已知周线 L 的所有曲面 S 上的通量均相同，亦即此通量只依赖于周线 L 而与所张曲面 S 的形状无关。

设 S 与 S_* 是任意两个张于周线 L 上的曲面，则 S 与 S_* 组成一封闭曲面，此封闭曲面所围成的体积为 V。对 S 和 V 使用奥高定理，则有

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \int_{S_*} v_n \mathrm{d}S - \int_S v_n \mathrm{d}S = 0$$

即有

$$\int_{S_*} v_n \mathrm{d}S = \int_S v_n \mathrm{d}S$$

上式中对 S_* 面而言取的是外法线，对 S 面而言则取的是内法线。

1.13 环量、旋度、斯托克斯定理、无旋场

现给定一矢量场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$，在场内取任意一曲线 L，作线积分

$$\int_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L (v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y + v_z \mathrm{d}z) \tag{1.162}$$

如上积分称作矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿曲线 L 的**环量**(circulation)。如果 L 是一条封闭曲线，则上式的环量积分写成

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_L (v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y + v_z \mathrm{d}z)$$

设 P 是场内一点，在环绕 P 点附近取无限小的封闭回线 L，并规定某一方向为 L 的正方向。设张于周线 L 上的曲面是 S，作 S 的单位法线 $\hat{\boldsymbol{n}}$，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 的指向是这样：它在右手坐标系中与回线 L 的正方向形成右手螺旋系统，见图 1.16。

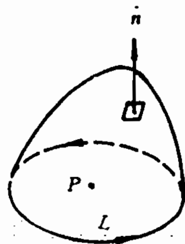


图 1.16

作矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿曲线 L 的环量并除以曲面的面积 S，然后令 L 向 P 点收缩，使之 S 趋于零，如果这个极限存在则定义一个量 $\mathrm{rot}_n \boldsymbol{v}$

$$\mathrm{rot}_n \boldsymbol{v} = \lim_{S\to 0} \frac{\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{S} \tag{1.163}$$

量 $\mathrm{rot}_n \boldsymbol{v}$ 是矢量旋度(curl of vector))—$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ 在 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 向投影。$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ 的具体形式是什么？如下具体推证。

如果 $\boldsymbol{v}$ 的三个分量具有连续的一阶偏导数，则(1.163)式的右边极限存在。现在直角坐标系中考虑，利用斯托克斯定理(Staokes' theorem)，则有

$$\begin{aligned}\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \oint_L (v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y + v_z \mathrm{d}z)\\ &= \int_S \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\cos(\hat{\boldsymbol{n}},x) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\cos(\hat{\boldsymbol{n}},y) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\cos(\hat{\boldsymbol{n}},z)\right]\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{1.164}$$

利用中值定理，上式可写成

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = S\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\cos(\hat{\boldsymbol{n}},x) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\cos(\hat{\boldsymbol{n}},y) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\cos(\hat{\boldsymbol{n}},z)\right]_Q$$

其中 Q 是曲面 S 上的某个点。将上式代入(1.163)式中并取极限

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}_n \boldsymbol{v} &= \lim_{S\to 0}\frac{\int_V \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{S}\\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\cos(\hat{\boldsymbol{n}},x) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\cos(\hat{\boldsymbol{n}},y) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\cos(\hat{\boldsymbol{n}},z)\end{aligned}$$

而旋度在 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 向的投影应为

$$\mathrm{rot}_n \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{v}$$

于是，由以上两式比较得到

$$\begin{aligned}&(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_x \cos(\hat{\boldsymbol{n}},x) + (\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_y \cos(\hat{\boldsymbol{n}},y) + (\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_z \cos(\hat{\boldsymbol{n}},z)\\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\cos(\hat{\boldsymbol{n}},x) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\cos(\hat{\boldsymbol{n}},y) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\cos(\hat{\boldsymbol{n}},z)\end{aligned}$$

由于方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是任意的，从而由上式推出 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ 的分量为

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_x &= \mathrm{rot}_x \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\\ (\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_y &= \mathrm{rot}_y \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\\ (\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_z &= \mathrm{rot}_z \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{1.165}$$

于是可把 rot$\boldsymbol{v}$ 表成如下行列式形式

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{1.166}$$

式(1.165)为在直角坐标系中旋度 rot$\boldsymbol{v}$ 在三个坐标轴向的投影；式(1.166)为旋度在直角坐标系中表达式。

式(1.163)给出矢量 rot$\boldsymbol{v}$ 在任意方向投影的定义，这个定义显然不涉及坐标系的选择，即与坐标系无关。

根据环量的(1.164)式形式，可将它写成

$$\int_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \mathrm{rot}_n \boldsymbol{v} \mathrm{d}S = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.167}$$

上式为不依赖坐标系选择的斯托克斯公式(Stokes' formula)。

矢量 $\boldsymbol{v}$ 满足 rot$\boldsymbol{v}$=0 的场称作无旋场(irrotational field)。**无旋场最主要的性质是：无旋场与位势场是等价的。**

若 $\boldsymbol{v}$ 是位势场，即

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\varphi$$

则 $\boldsymbol{v}$ 必为无旋场，即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$$

反之，若矢量 $\boldsymbol{v}$ 是无旋场，即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$$

则 $\boldsymbol{v}$ 必为位势场，即

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\varphi$$

证明 因 $\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\varphi$，将该式两边取旋度，则有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = 0$$

即场是无旋的。反过来，若 rot$\boldsymbol{v}$=0，则根据斯托克斯公式有

$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

由于上式中封闭曲线 L 是任取的，所以 $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的线积分与路径无关，根据 1.11 中的定理 2，则 $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为某个标量 φ 的全微分，即

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

从而有

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\varphi$$

因此无旋场与位势场是等价的。

1.14 微分矢量算子、张量的微分运算

1.14.1 哈密尔顿算子

在矢量分析中有一非常重要的微分矢量算子(differential vector operator)，该算子亦称哈密尔顿算子(Hamiltonian)，它的表达形式是(对于直角坐标系)

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.168}$$

该算子具有矢量和微分双重性质。一方面，它是个矢量，因此在运算时它遵循矢量代数和矢量分析中所有的法则；另一方面，它又是个微分算子，因此要按微分法则进行运算，但必须注意：按规定，∇只对位于它右边的量发生微分作用，对于它左边的量不发生微分作用。

有了微分算子∇，可以方便地表示场论中的某些量，并可用来简单地证明某些计算公式。例如：

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi \\ &= \hat{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \mathrm{grad}\varphi \end{aligned} \tag{1.169}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \mathrm{div}\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{1.170}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{v} &= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{k} \\ &= \mathrm{rot}\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{1.171}$$

对于方向导数

$$\frac{\partial\varphi}{\partial S} = \hat{S}\cdot\mathrm{grad}\varphi = \hat{S}\cdot\nabla\varphi = (\hat{S}\cdot\nabla)\varphi \tag{1.172}$$

利用上式，可将一个矢量$\boldsymbol{v}$在直角坐标系中的方向导数$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial S}$表成算子作用形式

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial S}\hat{i} + \frac{\partial v_y}{\partial S}\hat{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\hat{k} \\ &= (\hat{S}\cdot\nabla)v_x\hat{i} + (\hat{S}\cdot\nabla)v_y\hat{j} + (\hat{S}\cdot\nabla)v_z\hat{k} \\ &= (\hat{S}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{1.173}$$

对于拉普拉斯算子(Laplacian)，在直角坐标系中有

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \\ &= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi \\ &= (\nabla\cdot\nabla)\varphi \end{aligned} \tag{1.174}$$

即

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2 \tag{1.175}$$

现在利用哈密尔顿算子符号来证明几个较为复杂的微分公式：

① $\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\,\mathrm{div}\boldsymbol{a} + \mathrm{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{a}$ (1.176)

证明 因上式的左边可写成

$$\mathrm{div}(\varphi \boldsymbol{a}) = \nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{a})$$

根据两个函数之积的微分法则，在∇对$(\varphi \boldsymbol{a})$微分时，先认为一个量为"常数"而微分另一个，再微分这个而认为另一个为"常数"，即有

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{a}) &= \nabla \cdot (\varphi_c \boldsymbol{a}) + \nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{a}_c) \\
&= \varphi_c(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) + \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{a}_c \\
&= \varphi_c(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}_c \cdot \nabla \varphi \\
&= \varphi(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} \cdot \nabla \varphi
\end{aligned} \tag{1.177}$$

于是得到

$$\mathrm{div}(\varphi \boldsymbol{a}) = \varphi\, \mathrm{div}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{grad}\varphi = \varphi\, \mathrm{div}\boldsymbol{a} + \mathrm{grad}\varphi \cdot \boldsymbol{a}$$

从而公式(1.176)得到证明。在(1.177)式中的φ_c和$\boldsymbol{a}_c$是表示它们暂为常数，不受∇的微分作用。（在一个字母上加下标"c"表示该量暂为常数的做法，在以后亦要常用。）

② $\mathrm{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{b}$ (1.178)

证明 由于上式的左边可以表成

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_c) + \nabla \cdot (\boldsymbol{a}_c \times \boldsymbol{b}) \tag{1.179}$$

根据三矢量混合乘积的法则(见(1.10)式)，则上式右边的第一项可表成

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_c) = (\nabla \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}_c = \boldsymbol{b}_c \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a})$$

对于(1.179)式右边第二项可表成

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{a}_c \times \boldsymbol{b}) &= -\nabla \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}_c) = -(\nabla \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}_c = -\boldsymbol{a}_c \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b}) \\
&= -\boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

利用以上两式，则(1.179)式变成

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b}) \\
&= \boldsymbol{b} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

于是公式(1.178)得到证明。

③ $\mathrm{rot}(\varphi \boldsymbol{a}) = \varphi\, \mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \mathrm{grad}\varphi \times \boldsymbol{a}$ (1.180)

证明 因上式的左边可以写成

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\varphi \boldsymbol{a}) &= \nabla (\varphi \boldsymbol{a}) = \nabla \times (\varphi_c \boldsymbol{a}) + \nabla \times (\varphi \boldsymbol{a}_c) \\
&= \nabla \varphi_c \times \boldsymbol{a} + \nabla \times \varphi \times \boldsymbol{a}_c = \varphi_c \nabla \times \boldsymbol{a} + \mathrm{grad}\varphi \times \boldsymbol{a}_c \\
&= \varphi \nabla \times \boldsymbol{a} + \mathrm{grad}\varphi \times \boldsymbol{a} = \varphi\, \mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \mathrm{grad}\varphi \times \boldsymbol{a}
\end{aligned}$$

于是(1.180)式得到证明。

④ $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\mathrm{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ (1.181)

证明 因上式的左边利用恒等式(1.11)可以写成

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= \nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \nabla \times (\boldsymbol{a}_c \times \boldsymbol{b}) + \nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_c) \\
&= \boldsymbol{a}_c(\nabla \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}_c \circ \nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}_c \cdot \nabla)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}_c(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) \\
&= (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\mathrm{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\mathrm{div}\boldsymbol{a}
\end{aligned}$$

于是(1.181)式得到证明。

⑤ $\mathrm{grad}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{b}$

证明 因上式的左边利用恒等式(1.11)可以写成

$$\mathrm{grad}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \nabla (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \nabla (\boldsymbol{a}_c \cdot \boldsymbol{b}) + \nabla (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_c)$$

$$= (a_c \cdot \nabla) \cdot b + a_c \times (\nabla \times b) + (b_c \cdot \nabla) a + b_c \times (\nabla \times a)$$
$$= (b \cdot \nabla) a + (a \cdot \nabla) b + b \times \mathrm{rot} a + a \times \mathrm{rot} b \qquad (1.182)$$

于是(1.182)式得到证明。

⑥ 在上式中，若令 $a=b$，则得如下公式

$$\mathrm{grad}\, \frac{a^2}{2} = (a \cdot \nabla) a + a \times \mathrm{rot} a \qquad (1.183)$$

如上公式亦可改写成

$$(a \cdot \nabla) a = \mathrm{grad}\, \frac{a^2}{2} - a \times \mathrm{rot} a \qquad (1.184)$$

⑦ $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \Delta\varphi$ (1.185)

证明 因上式的左边可以写成

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta\varphi$$

于是(1.185)式得到证明。

⑧ $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = 0$ (1.186)

证明 因上式的左边可以写成

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = \nabla \times \nabla \varphi = 0$$

于是(1.186)式得到证明。

⑨ $\mathrm{div}(\mathrm{rot} a) = 0$ (1.187)

证明 因上式的左边可以写成

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot} a) = \nabla \cdot \nabla \times a = \nabla \times \nabla \cdot a$$

在混合乘积中既然有两个矢量相同，则必为零，从而有

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot} a) = 0$$

⑩ $\mathrm{rot}(\mathrm{rot} a) = \mathrm{grad}(\mathrm{div} a) - \Delta a$ (1.188)

证明 因上式的左边可以写成

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot} a) = \nabla \times (\nabla \times a) = \nabla (\nabla \cdot a) - (\nabla \cdot \nabla) a$$
$$= \mathrm{grad}(\mathrm{div} a) - \Delta a$$

于是(1.188)式得到证明。

通过以上讨论，可以清楚地看出哈密尔顿算子的重要作用，它不但便于书写，方便记忆，而且可以按照普通的矢量法则及微分法则进行运算，这大大减化了计算工作量，克服了某些公式难于记忆的缺点；同时也将矢量分析中的各种运算融成一个统一的封闭体系。从哈密尔顿算子的角度来看，引进 $\mathrm{grad}\varphi$、$\mathrm{div} a$、$\mathrm{rot} a$ 对矢量分析而言是非常自然的，因为它们只不过是微分矢量算子 ∇ 与标量 φ 的乘积、与矢量 a 的点积、与矢量 a 的叉积而已，而这些矢量运算在矢量分析中又是大量出现的，所以引进他们是十分自然的。当然引进这些量还有更重要的物理上的考虑，因为这些量在物理及力学中均具有非常重要的物理意义。

1.14.2 张量的微分运算

① 张量的梯度

一个 n 阶张量 $\mathbf{E}=\{E_{i_1 i_2 \cdots i_n}\}$ 的梯度 $\nabla\mathbf{E}$ 定义作

$$\nabla \mathbf{E} = \text{grad}\mathbf{E} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_k} E_{i_1 i_2 \cdots i_n}\right\} \tag{1.189}$$

$\nabla\mathbf{E}$ 为 $n+1$ 阶张量，它的分量可简记作

$$\frac{\partial}{\partial x_k} E_{i_1 i_2 \cdots i_n} = E_{i_1 i_2 \cdots i_n, k} \tag{1.190}$$

k 为 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 之外的一个指标。

② 张量的散度

n 阶张量 $\mathbf{E}$ 的散度 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 定义作

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \text{div}\mathbf{E} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_k} E_{k i_2 i_3 \cdots i_n}\right\} \tag{1.191}$$

它是 $n-1$ 阶张量，它相当 ∇ 与 $\mathbf{E}$ 的并矢张量 $\nabla\mathbf{E}$（即张量的梯度）的一次缩并。例如

$$\text{div}\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

它是梯度 $\nabla \boldsymbol{a}$ 的缩并而成的标量。

③ 奥高公式

场论中的奥高公式可以推广到张量中，对于 n 阶张量 $\mathbf{E}$ 的奥高公式为

$$\oint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbf{E} = \int_V \text{div}\mathbf{E}\text{d}V \tag{1.192}$$

证明 因为对于 $\mathbf{E}$ 的任一分量 $E_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 有

$$\oint_S n_{i_1} E_{i_1 i_2 \cdots i_n} \text{d}S = \int_V \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} E_{i_1 i_2 \cdots i_n} \text{d}V$$

所以(1.192)式成立。

例 1 证明 $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{I}) = \nabla \varphi$

因

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{I}) = \nabla \cdot \{\varphi \delta_{ij}\} = \left(\frac{\partial(\varphi \delta_{ij})}{\partial x_i}\right) = \left(\delta_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \nabla \varphi$$

例 2 证明 $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{E}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{E} + (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{E}$

因

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{E}) = \nabla \cdot \{\varphi E_{ij}\} = \left(\frac{\partial(\varphi \delta_{ij})}{\partial x_i}\right) = \left(\varphi \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} E_{ij}\right)$$

$$= \varphi \nabla \cdot \mathbf{E} + (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{E}$$

例 3 证明 $\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a})) = (\nabla \mathbf{a}) : (\nabla \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a})$

因

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) = a_i \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

$$= (\nabla \boldsymbol{a}) : (\nabla \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} \cdot \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{a})$$

1.15 基本运算公式

1.15.1 一些重要公式

在场论分析中有如下重要的基本公式，归纳如下：

1. $\text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad}\varphi + \text{grad}\psi$

2. $\mathrm{grad}(\varphi\psi) = \varphi\mathrm{grad}\psi + \psi\mathrm{grad}\varphi$

3. $\mathrm{grad}F(\varphi) = F'(\varphi)\mathrm{grad}\varphi$

$\mathrm{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ ， $\boldsymbol{r}$ 为矢径

4. $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{div}\boldsymbol{a} + \mathrm{div}\boldsymbol{b}$

5. $\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\mathrm{div}\boldsymbol{a} + \mathrm{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{a}$

6. $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{b}$

7. $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \mathrm{rot}\boldsymbol{b}$

8. $\mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\,\mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \mathrm{grad}\varphi\times\boldsymbol{a}$

9. $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\mathrm{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\mathrm{div}\boldsymbol{a}$

10. $\mathrm{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{b}$

11. $\mathrm{grad}\dfrac{a^2}{2} = (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$

$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\dfrac{a^2}{2} - \boldsymbol{a}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$

12. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \Delta\varphi$

13. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{a}) = 0$

14. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = 0$

15. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{a}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{a}) - \Delta\boldsymbol{a}$

16. $\mathrm{div}(\varphi\,\mathrm{grad}\psi) = \varphi\Delta\psi + \mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}\psi$

17. $\Delta(\varphi\psi) = \psi\Delta\varphi + \varphi\Delta\psi + 2\mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}\psi$

18. $\int_V \mathrm{grad}\varphi\,\mathrm{d}V = \oint_S \hat{\boldsymbol{n}}\varphi\,\mathrm{d}S$

19. 奥高公式

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \oint_S \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{a}\mathrm{d}S$$

20. $\int_V \mathrm{rot}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \oint_S \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{a}\mathrm{d}S$

21. $\int_V (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \oint_S (\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{a}\mathrm{d}S$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是作为常矢量

22. $\int_V \Delta\varphi\,\mathrm{d}V = \oint_S \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S = \oint_S \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}S$

23. $\int_V \Delta\boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \oint_S \dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial n}\mathrm{d}S = \oint_S (\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}\mathrm{d}S$

24. 格林第一公式(first formula of Green)

$$\int_V (\varphi\Delta\psi + \mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}\psi)\mathrm{d}V = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

$$\int_V (\psi\Delta\varphi + \mathrm{grad}\psi\cdot\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{d}V = \oint_S \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

25. 格林第二公式(second formula of Green)

$$\int_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\mathrm{d}V = \oint_S (\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n})\mathrm{d}S$$

26. $\int_V (\mathrm{grad}\varphi)^2\mathrm{d}V = \oint_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S$

其中 φ 满足

$$\Delta\varphi = 0$$

1.15.2 对上述部分公式给出证明

① 关于第 18 式：

$$\int_V \mathrm{grad}\varphi\,\mathrm{d}V = \oint_S \hat{n}\varphi\,\mathrm{d}S$$

证明 因上式的左边可以化成

$$\int_V \mathrm{grad}\varphi\,\mathrm{d}V = \int_V \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}\right)\mathrm{d}V \tag{1.193}$$

而据奥高公式——第 19 式。若令 $\boldsymbol{a}=\varphi\hat{i}$，则该式给出

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}V = \oint_S \hat{n}\cdot(\varphi\hat{i})\mathrm{d}S = \oint_S \varphi\cos(\hat{n},x)\mathrm{d}S$$

同理则有

$$\int_V \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}V = \oint_S \varphi\cos(\hat{n},y)\mathrm{d}S$$

$$\int_V \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}V = \oint_S \varphi\cos(\hat{n},z)\mathrm{d}S$$

将以上三式代进(1.193)式的右边，则给出

$$\int_V \mathrm{grad}\varphi\,\mathrm{d}V = \oint_S [\varphi\cos(\hat{n},x)\hat{i} + \varphi\cos(\hat{n},y)\hat{j} + \varphi\cos(\hat{n},z)\hat{k}]\mathrm{d}S$$

$$= \oint_S \varphi\hat{n}\mathrm{d}S$$

② 关于第 20 式：

$$\int_V \mathrm{rot}\boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \oint_S \hat{n}\times\boldsymbol{a}\mathrm{d}S \tag{.194}$$

证明 现只证上式的 x 向分量

$$\int_V \mathrm{rot}_x\boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \int_V \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

$$= \int_V \frac{\partial a_z}{\partial y}\mathrm{d}V - \int_V \frac{\partial a_y}{\partial z}\mathrm{d}V$$

对上式的右边两项分别使用奥高公式，则上式变成

$$\int_V \mathrm{rot}_x\boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \oint_S a_z\cos(\hat{n},y)\mathrm{d}S - \oint_S a_y\cos(\hat{n},z)\mathrm{d}S$$

$$= \oint_S (\hat{n}\times\boldsymbol{a})_x\mathrm{d}S$$

对于(1.194)式的 y 向和 z 向分量同理可证。

③ 关于第 21 式

$$\int_V (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \oint_S (\boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{a}\mathrm{d}S$$

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{const}$$

证明　因上式的左边展写开并考虑到 $\boldsymbol{v}=\mathrm{const}$ 的情况下，再利用奥高公式，则有

$$\begin{aligned}
\int_V (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}\mathrm{d}V &= \int_V \left(v_x \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z} \right) \mathrm{d}V \\
&= \int_V \left(\frac{\partial (v_x \boldsymbol{a})}{\partial x} + \frac{\partial (v_y \boldsymbol{a})}{\partial y} + \frac{\partial (v_z \boldsymbol{a})}{\partial z} \right) \mathrm{d}V \\
&= \oint_S [v_x \cos(\hat{\boldsymbol{n}}, x) + v_y \cos(\hat{\boldsymbol{n}}, y) + v_z \cos(\hat{\boldsymbol{n}}, z)]\boldsymbol{a}\mathrm{d}S \\
&= \oint_S (\boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{a}\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

④ 关于第 22 式

$$\int_V \Delta\varphi \mathrm{d}V = \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S$$

证明　因上式的左边可表成

$$\int_V \Delta\varphi \mathrm{d}V = \int_V (\nabla \cdot \nabla)\varphi \mathrm{d}V = \int_V \mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{d}V$$

利用奥高公式 19 式，并在该中令 $\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\varphi$，则证得上式

$$\int_V \Delta\varphi \mathrm{d}V = \oint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathrm{grad}\varphi \mathrm{d}S = \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S$$

⑤ 关于第 23 式

$$\int_V \Delta\boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \oint_S \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial n} \mathrm{d}S$$

该式展写成三个分量式，再利用上面的结果即可。

⑥ 关于第 24 式

$$\int_V (\varphi\Delta\psi + \mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{grad}\psi)\mathrm{d}V = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \mathrm{d}S$$

证明　利用第 19 式，令 $\boldsymbol{a}=\varphi\mathrm{grad}\psi$ 代进该式中，并考虑到第 16 式，则证得上式。

⑦ 关于第 25 式

$$\int_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\mathrm{d}V = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \mathrm{d}S$$

将格林第一公式的两种不同形式相减，即得上式。

⑧ 关于第 26 式

$$\int_V (\mathrm{grad}\varphi)^2 \mathrm{d}V = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}S \text{，其中 } \Delta\varphi = 0$$

在第 24 式中令 $\varphi=\psi$，并考虑到 $\Delta\varphi=0$，即得上式。

1.16　曲线坐标系及其一些重要量在该坐标系中的表达形式

在许多物理问题中，利用曲线坐标可以使控制方程组和边界条件得到简化，同时求解方便，最常用的曲线坐标是柱坐标和球坐标(cylindrical and spherical coordinates)。

1.16.1　曲线坐标的引进

现考虑空间任一点 P，它在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标为 (x,y,z)，该点的矢径为 $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{1.195}$$

点 P 也可用另外的三个量 (q_1,q_2,q_3) 来标定，见图 1.17，其 q_1、q_2、q_3 为曲线坐标(curvilinear coordinates)。显然，曲线坐标 (q_1,q_2,q_3) 与直角坐标 (x,y,z) 之间存在着一定的函数关系。曲线坐标 q_1、q_2、q_3，当然会随 P 点而改变，亦即它们是矢径 $\boldsymbol{r}$ 或直角坐标 x、y、z 的函数，即

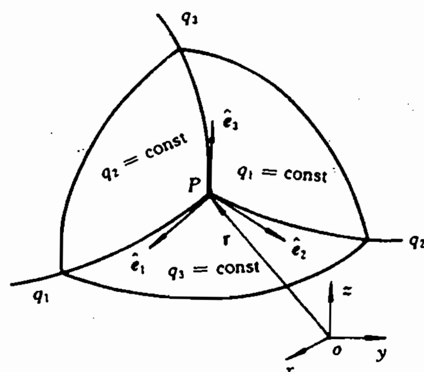


图 1.17

$$\begin{cases} q_1 = q_1(\boldsymbol{r}) = q_1(x,y,z) \\ q_2 = q_2(\boldsymbol{r}) = q_2(x,y,z) \\ q_3 = q_3(\boldsymbol{r}) = q_3(x,y,z) \end{cases} \tag{1.196}$$

反过来，x、y、z 也作为 q_1、q_2、q_3 的函数，即有

$$\begin{cases} x = x(q_1,q_2,q_3) \\ y = y(q_1,q_2,q_3) \\ z = z(q_1,q_2,q_3) \end{cases} \tag{1.197}$$

上式的函数是式(1.196)的反函数，反函数在所考虑区域内存在的唯一条件是：

① 函数 q_i 在所考虑的区域内单值连续且具有连续一阶偏导数；

② 雅可比行列式 $\partial(q_1,q_2,q_3)/\partial(x,y,z)$ 在所考虑的区域内处处不为零。

在直角坐标系中作曲面如下

$$q_1 = \text{const} \quad , \quad q_2 = \text{const} \quad , \quad q_3 = \text{const}$$

这些曲面称为曲线坐标系 (q_1,q_2,q_3) 中的坐标曲面(coordinate surfaces)。两个不同坐标曲面的交线称为坐标曲线(亦称：坐标线)，以 q_1、q_2、q_3 表示。具体来说，坐标曲面 q_1=const 和 q_2=const 的交线以 q_3 表示；坐标曲面 q_2=const 和 q_3=const 的交线以 q_1 表示；坐标曲面 q_1=const 和 q_3=const 的交线以 q_2 表示。显然，在坐标线 q_1 上只有 q_1 改变而 q_2 和 q_3 保持不变；在坐标线 q_2 上只有 q_2 改变而 q_1 和 q_3 保持不变；在坐标线 q_3 上只有 q_3 改变而 q_1 和 q_2 保持不变。

在坐标线 q_1、q_2、q_3 上作单位矢量 $\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$、$\hat{e}_3$。如果 $\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$、$\hat{e}_3$ 相互正交，则称该坐标系为正交曲线坐标系(orthogonal system of curvilinear coordinates)；反之，称为斜交曲线坐标系(oblique system of curvilinear coordinates)。如下只研究正交曲线坐标系，在该坐标系中任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 可表成

$$\boldsymbol{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3 \tag{1.198}$$

式中 a_1、a_2、a_3 为 $\boldsymbol{a}$ 在曲线坐标系中的坐标分量。

曲线坐标系与直角坐标系的根本区别在于曲线坐标系中的单位矢量的方向随着考虑的点不同而变化，见图 1.17。

最常用的正交曲线坐标系是柱坐标系(见图 1.18)和球坐标系(见图 1.19)。

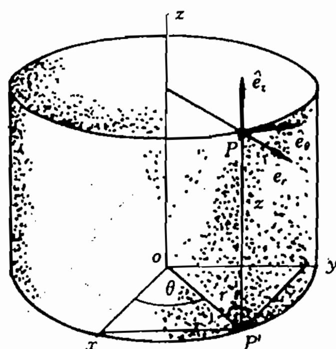


图 1.18

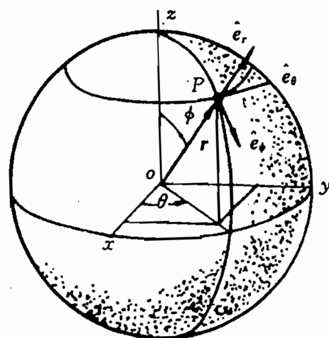


图 1.19

在柱坐标系中

$$\hat{e}_1 = \hat{e}_r \quad , \quad q_1 = r \quad , \quad 0 \leqslant r < +\infty$$
$$\hat{e}_2 = \hat{e}_\theta \quad , \quad q_2 = \theta \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$
$$\hat{e}_3 = \hat{e}_z \quad , \quad q_3 = z \quad , \quad -\infty < z < +\infty$$

坐标 r、θ、z 与直角坐标 x、y、z 的关系为

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad z = z \tag{1.199}$$

在球坐标系中

$$\hat{e}_1 = \hat{e}_r \quad , \quad q_1 = r \quad , \quad 0 \leqslant r < +\infty$$
$$\hat{e}_2 = \hat{e}_\phi \quad , \quad q_2 = \phi \quad , \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$
$$\hat{e}_3 = \hat{e}_\theta \quad , \quad q_3 = \theta \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

坐标 r、ϕ、θ 与直角坐标 x、y、z 的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases} \tag{1.200}$$

1.16.2 弧元素在曲线坐标系中的表达式

在空间给出矢径 $\boldsymbol{r}$,见图 1.20。

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{1.201}$$

现求弧元素矢量(vector of arc element)$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在曲线坐标系中的表达式,据(1.201)式有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3 \tag{1.202}$$

上式中的$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}$是 $\boldsymbol{r}$ 在 q_2 和 q_3 不变时只有 q_1 变化的结果,所以$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}$显然是沿坐标线 q_1 的方向,即 $\hat{e}_1$ 向;同理$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}$的方向是 $\hat{e}_2$ 向,$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}$的方向是 $\hat{e}_3$ 向。

关于$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}$的大小。因据(1.201)式

$$\frac{\partial r}{\partial q_1}=\frac{\partial x}{\partial q_1}\hat{i}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\hat{j}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\hat{k}$$

从而推出$\left|\frac{\partial r}{\partial q_1}\right|$为

$$\left|\frac{\partial r}{\partial q_1}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$$

对于$\left|\frac{\partial r}{\partial q_2}\right|$和$\left|\frac{\partial r}{\partial q_3}\right|$同理可求，现令

$$\left|\frac{\partial r}{\partial q_1}\right|=H_1,\quad \left|\frac{\partial r}{\partial q_2}\right|=H_2,\quad \left|\frac{\partial r}{\partial q_3}\right|=H_3 \tag{1.203}$$

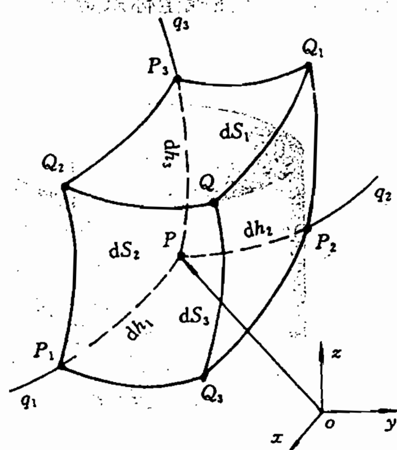


图 1.20

于是有

$$\begin{cases}H_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\\ H_2=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}\\ H_3=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}\end{cases} \tag{1.204}$$

H_1、H_2、H_3称作拉梅系数(Lame's coefficients)，它是曲线坐标q_1、q_2、q_3的函数。

根据如上分析，(1.202)式可以表成

$$dr=H_1dq_1\hat{e}_1+H_2dq_2\hat{e}_2+H_3dq_3\hat{e}_3 \tag{1.205}$$

这就是弧元素矢量在曲线坐标系中的表达式。它在曲线坐标轴上的投影dh_1、dh_2、dh_3分别为

$$dh_1=H_1dq_1,\quad dh_2=H_2dq_2,\quad dh_3=H_3dq_3 \tag{1.206}$$

现设dr的大小$|dr|$以dh表示，则有

$$dh^2=H_1^2dq_1^2+H_2^2dq_2^2+H_3^2dq_3^2 \tag{1.207}$$

以dh_1、dh_2、dh_3为边作一个平行六面体$PP_1Q_3P_2Q_1P_3Q_2Q$，见图 1.20，该六面体的体积为

$$dV=H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3 \tag{1.208}$$

六面体各面的面积分别为

$$\begin{cases}dS_1=H_2H_3dq_2dq_3\\ dS_2=H_3H_1dq_3dq_1\\ dS_3=H_1H_2dq_1dq_2\end{cases} \tag{1.209}$$

根据式(1.199)和(1.204)，在柱坐标系中

$$H_r=H_1=1,\quad H_\theta=H_2=r,\quad H_z=H_3=1 \tag{1.210}$$

于是微元长度dh和六面体元体积分别为

$$dh=\sqrt{H_1^2dq_1^2+H_2^2dq_2^2+H_3^2dq_3^2}$$

$$= \sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2}$$

$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

根据式(1.200)和(1.204),在球坐标系中

$$H_r = H_1 = 1, \quad H_\phi = H_2 = r, \quad H_\theta = H_3 = r\sin\phi \tag{1.211}$$

于是微元长度和六面体元体积分别为

$$\mathrm{d}h = \sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2 + r^2\sin^2\phi\mathrm{d}\theta^2}$$

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

1.16.3 梯度 gradφ 在曲线坐标系中的表达式

根据梯度的性质,gradφ 在曲线坐标轴上的投影分别是该方向的方向导数:$\frac{\partial\varphi}{\partial h_1}$、$\frac{\partial\varphi}{\partial h_2}$、$\frac{\partial\varphi}{\partial h_3}$。再根据(1.206)式,则有

$$\begin{cases} (\mathrm{grad}\varphi)_{q_1} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial h_1} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_1} \\ (\mathrm{grad}\varphi)_{q_2} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial h_2} = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_2} \\ (\mathrm{grad}\varphi)_{q_3} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial h_3} = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_3} \end{cases} \tag{1.212}$$

即

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\hat{e}_3 \tag{1.213}$$

这就是梯度 gradφ 在曲线坐标系中的表达式。

根据上式以及(1.210)和(1.211)式,gradφ 在柱坐标系和球坐标系中的表达式分别为

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{e}_z \tag{1.214}$$

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{e}_\phi + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta \tag{1.215}$$

1.16.4 散度 div$\boldsymbol{a}$ 在曲线坐标系中的表达式

散度 div$\boldsymbol{a}$ 的定义为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S a_n\mathrm{d}S}{V} \tag{1.216}$$

该定义与坐标系的选取无关,可据此来求散度 div$\boldsymbol{a}$ 在曲线坐标系中的表达式。在场内任取一点 P,在该点以 $\mathrm{d}h_1$、$\mathrm{d}h_2$、$\mathrm{d}h_3$ 为邻边作平行六面体,见图 1.20,该体元的体积 $\mathrm{d}V$ 即为(1.208)式所示,现在该体积就相当上式中的 V。由于所考虑的是微元体,体元的各个面亦是微元,因此在上式中的通量积分便可直接计算。

经过 $PP_2Q_1P_3$ 面的通量为

$$-a_1\mathrm{d}h_2\mathrm{d}h_3 = -a_1H_2H_3\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$$

因此面的外法线方向是 q_1 的负向,故取负号。

经过 $P_1Q_3QQ_2$ 面的通量为

$$\left[a_1H_2H_3 + \frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}dq_1\right]dq_2dq_3$$

于是经过这两个面的总通量为

$$\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}dq_1dq_2dq_3$$

同理，经过 $PP_3Q_2P_1$ 面与 $P_2Q_1QQ_3$ 面的总通量为

$$\frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2}dq_1dq_2dq_3$$

经过 $PP_1Q_3P_2$ 面与 $P_3Q_2QQ_1$ 面的总通量为

$$\frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}dq_1dq_2dq_3$$

将如上三式相加便给出通过体元 dV 各面的通量，即

$$\oint_V a_n dS = \left[\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right]dq_1dq_2dq_3$$

利用上式以及表示体元 dV 的(1.208)式(现在 $dV=V$)，于是从(1.216)式推出在曲线坐标系中的散度 $\text{div}\boldsymbol{a}$ 为

$$\text{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right] \tag{1.217}$$

在柱坐标系和球坐标系中，$\text{div}\boldsymbol{a}$ 的表达式分别为

$$\text{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{1.218}$$

$$\text{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial(a_\phi\sin\phi)}{\partial\phi} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta} \tag{1.219}$$

1.16.5 旋度 $\text{rot}\boldsymbol{a}$ 在曲线坐标系中的表达式

旋度 $\text{rot}_n\boldsymbol{a}$ 的定义为

$$\text{rot}_n\boldsymbol{a} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint_L \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}}{S} \tag{1.220}$$

该定义与坐标系的选取无关。现利用该定义来求 $\text{rot}\boldsymbol{a}$ 在曲线坐标系中的表达式。为此，我们先求 $\text{rot}\boldsymbol{a}$ 在 q_1 轴上的投影，此时取 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为 q_1 的正向，即 $\hat{\boldsymbol{n}}=\hat{\boldsymbol{e}}_1$，并考虑 $PP_2Q_1P_3$ 面，该面即 $q_1=\text{const}$ 的面，其面积 $S=dS_1$，见图 1.20。现计算绕该面环线 $L=\overbrace{PP_2Q_1P_3}$的环量，按逆时针转向为正。

$$\oint_L \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\widehat{PP_2}}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\widehat{P_2Q_1}}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\widehat{Q_1P_3}}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\widehat{P_3P}}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$$

其中

$$\int_{\widehat{PP_2}}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = a_2dh_2 = a_2H_2dq_2$$

$$\int_{\widehat{P_2Q_1}}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \left[a_3H_3 + \frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2}dq_2\right]dq_3$$

$$\int_{\widehat{Q_1P_3}}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = -\left[a_2H_2 + \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3}dq_3\right]dq_2$$

$$\int_{\widehat{P_3P}} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = - a_3 H_3 \mathrm{d}q_3$$

于是由上诸式推出

$$\oint_S \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left[\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3}\right]\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$$

而据(1.209)式

$$S = dS_1 = H_2H_3\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$$

于是将以上两式代入(1.220)式便推出 rot$\boldsymbol{a}$ 在 q_1 上的投影$(\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_1$ 为

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_1 = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3}\right]$$

同理,可以推出旋度在 q_2 和 q_3 轴向的投影。将 rot$\boldsymbol{a}$ 的三个投影分量归纳如下

$$\begin{cases} (\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_1 = \dfrac{1}{H_2H_3}\left[\dfrac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \dfrac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3}\right] \\ (\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_2 = \dfrac{1}{H_3H_1}\left[\dfrac{\partial(a_1H_1)}{\partial q_3} - \dfrac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_1}\right] \\ (\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_3 = \dfrac{1}{H_1H_2}\left[\dfrac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_1} - \dfrac{\partial(a_1H_1)}{\partial q_2}\right] \end{cases} \tag{1.221}$$

或者将 rot$\boldsymbol{a}$ 写成

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} (H_1\hat{\boldsymbol{e}}_1)_c & (H_2\hat{\boldsymbol{e}}_2)_c & (H_3\hat{\boldsymbol{e}}_3)_c \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1a_1 & H_2a_2 & H_3a_3 \end{vmatrix} \tag{1.222}$$

在上式中的$(H_i\hat{\boldsymbol{e}}_i)_c$ 即 $H_i\hat{\boldsymbol{e}}_i$,之所以如此,是约定 $H_i\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 不受$\dfrac{\partial}{\partial q_i}$的微分作用。

在柱坐标系和球坐标系中 rot$\boldsymbol{a}$ 的分量表达式分别为

$$\begin{cases} \mathrm{rot}_r\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \mathrm{rot}_\theta\boldsymbol{a} = \dfrac{\partial a_r}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial r} \\ \mathrm{rot}_z\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(ra_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{cases} \tag{1.223}$$

以及

$$\begin{cases} \mathrm{rot}_r\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial(a_\theta\sin\phi)}{\partial \phi} - \dfrac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial a_\phi}{\partial \theta} \\ \mathrm{rot}_\phi\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(ra_\theta)}{\partial r} \\ \mathrm{rot}_\theta\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(ra_\phi)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial \phi} \end{cases} \tag{1.224}$$

1.16.6 拉普拉斯算子 $\Delta\varphi$ 在曲线坐标系中的表达式

令 $\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\varphi$,代入 div$\boldsymbol{a}$ 在曲线坐标系的表达式(1.217)中,并考虑到 gradφ 在曲线坐标系的表达式(1.213)便得到 $\Delta\varphi$ 在曲线坐标系中的表达式

$$\Delta\varphi=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right] \tag{1.225}$$

$\Delta\varphi$ 在柱坐标系和球坐标系中的表达式为

$$\Delta\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{1.226}$$

$$\Delta\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \tag{1.227}$$

1.17 曲线坐标系中单位矢量对坐标的偏导数及其应用

在物理与力学问题中经常需要计算矢量对曲线坐标的偏导数，在计算这些偏导数时，具有基本意义是单位矢量 $\hat{e}_i$ 对曲线坐标 q_i 的九个偏导数，这些偏导数满足下列公式：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{e}_1}{\partial q_1}=-\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_2}\hat{e}_2-\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_3}\hat{e}_3\\ \dfrac{\partial\hat{e}_2}{\partial q_1}=\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_2}\hat{e}_1\\ \dfrac{\partial\hat{e}_1}{\partial q_2}=\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_1}\hat{e}_2\end{cases} \tag{1.228}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{e}_2}{\partial q_2}=-\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_3}\hat{e}_3-\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_1}\hat{e}_1\\ \dfrac{\partial\hat{e}_3}{\partial q_2}=\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_3}\hat{e}_2\\ \dfrac{\partial\hat{e}_2}{\partial q_3}=\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_2}\hat{e}_3\end{cases} \tag{1.229}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{e}_3}{\partial q_3}=-\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_1}\hat{e}_1-\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_2}\hat{e}_2\\ \dfrac{\partial\hat{e}_1}{\partial q_3}=\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_1}\hat{e}_3\\ \dfrac{\partial\hat{e}_3}{\partial q_1}=\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_3}\hat{e}_1\end{cases} \tag{1.230}$$

如上九个式子可以简写成两个统一公式（$i\neq j\neq k\neq i$，且求和约定中止）

$$\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial q_j}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial q_i}\hat{e}_j \tag{1.231}$$

$$\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial q_i}=-\frac{1}{H_j}\frac{\partial H_i}{\partial q_j}\hat{e}_j-\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k}\hat{e}_k \tag{1.232}$$

在如上的两个公式中 i、j、k 均在 1、2、3 之间变化，但 i、j、k 不同时取一样的值，且按 1、2、3 的偶排列变化取值。另外，同指标的作和约定废止。

现对如上公式证明。先证(1.228)的第二和第三式，因为 $\hat{e}_i$ 是单位正交基矢量(见图 1.21)，所以

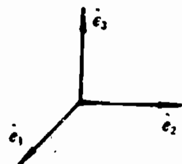


图 1.21

$$
\begin{cases}
\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i \equiv 1, & (i \text{ 非作和}) \\
\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \equiv 0, & (i \neq j) \\
\hat{e}_i \times \hat{e}_j \equiv \hat{e}_k, & (i、j、k \text{ 按 } 1、2、3 \text{ 偶排列取值})
\end{cases}
\tag{1.233}
$$

对上式的第一式对 q_j 求偏导，即有

$$
\frac{\partial}{\partial q_j}(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i) = 2\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q_j} \cdot \hat{e}_i \equiv \frac{\partial}{\partial q_j}(1) = 0
$$

从而有

$$
\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q_j} \cdot \hat{e}_i = 0 \quad (i \text{ 非作和})
$$

即有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_1} \cdot \hat{e}_1 = 0, & (i = j = 1) \\
\dfrac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_2} \cdot \hat{e}_1 = 0, & (i = 1, j = 2) \\
\dfrac{\partial \hat{e}_2}{\partial q_1} \cdot \hat{e}_2 = 0, & (i = 2, j = 1) \\
\cdots\cdots
\end{cases}
$$

即有

$$
\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_1} \perp \hat{e}_1, \quad \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial q_2} \perp \hat{e}_1, \quad \frac{\partial \hat{e}_2}{\partial q_1} \perp \hat{e}_2, \cdots \tag{1.234}
$$

其次，据(1.202)和(1.205)式，有

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2} = (H_1\hat{e}_1) \cdot (H_2\hat{e}_2) = H_1H_2\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3} = (H_2\hat{e}_2) \cdot (H_3\hat{e}_3) = H_2H_3\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1} = (H_3\hat{e}_3) \cdot (H_1\hat{e}_1) = H_3H_1\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = 0
$$

将如上三式的第一式对 q_3 微分；第二式对 q_1 微分；第三式对 q_2 微分，则有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1} \cdot \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_2 \partial q_3} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_3} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2} = 0 \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2} \cdot \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_3} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_2} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3} = 0 \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3} \cdot \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_2 \partial q_3} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1} = 0
\end{cases}
$$

将上式加加减减可以推出

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \tag{1.235}
$$

而

$$
\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1\hat{e}_1) = \frac{\partial}{\partial q_1}(H_2\hat{e}_2) \tag{1.236}
$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3} = H_3\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

将以上两式分别代进(1.235)中则给出如下两式

$$H_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1\hat{\boldsymbol{e}}_1) = H_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \frac{\partial H_1}{\partial q_2}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + H_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot H_1 \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_2} = 0$$

$$H_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial q_1}(H_2\hat{\boldsymbol{e}}_2) = H_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \frac{\partial H_2}{\partial q_1}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + H_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot H_2 \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_2}{\partial q_1} = 0$$

由于 $\hat{\boldsymbol{e}}_3 \perp \hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_3 \perp \hat{\boldsymbol{e}}_2$，所以由以上两式推出

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \dfrac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_2} = 0, \quad \text{即} \quad \hat{\boldsymbol{e}}_3 \perp \dfrac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_2} \\ \hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \dfrac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_2}{\partial q_1} = 0, \quad \text{即} \quad \hat{\boldsymbol{e}}_3 \perp \dfrac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_2}{\partial q_1} \end{cases} \tag{1.237}$$

由(1.234)式和上式推出

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_2} \parallel \hat{\boldsymbol{e}}_2 \quad , \quad \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_2}{\partial q_1} \parallel \hat{\boldsymbol{e}}_1 \tag{1.238}$$

而据(1.236)式又有

$$\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + H_1 \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_2} = \frac{\partial H_2}{\partial q_1}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + H_2 \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_2}{\partial q_1}$$

根据(1.238)式以及 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 与 $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ 方向独立无关，推出

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\hat{\boldsymbol{e}}_1$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

即(1.228)的后两式得到证明。对于(1.229)和(1.230)的后两式同理可证。

根据(1.233)式以及(1.228)、(1.229)、(1.230)的后两式，则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_1}{\partial q_1} &= \frac{\partial}{\partial q_1}(\hat{\boldsymbol{e}}_2 \times \hat{\boldsymbol{e}}_3) = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_2}{\partial q_1} \times \hat{\boldsymbol{e}}_3 + \hat{\boldsymbol{e}}_2 \times \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_3}{\partial q_1} \\ &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_3 + \hat{\boldsymbol{e}}_2 \times \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_3}\hat{\boldsymbol{e}}_1 \\ &= -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \end{aligned}$$

即(1.228)的第一式得到证明。对于(1.229)和(1.230)的第一式同理可证。

在连续介质力学中经常出现 div$\boldsymbol{a}$、gradφ、rot$\boldsymbol{a}$、$\Delta\varphi$、$(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b}$、$\Delta\boldsymbol{a}$、…等算子，这些算子在曲线坐标系中的表达式其头四个在上节已经给出，也可以利用(1.228)、(1.229)、(1.230)式推出。现在来推导 $(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b}$ 和 $\Delta\boldsymbol{a}$ 的表达式。

① 推导 $(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b}$ 的表达式

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a} \cdot \nabla (b_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + b_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + b_3\hat{\boldsymbol{e}}_3) \\ &= \hat{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{a} \cdot \nabla b_1) + \hat{\boldsymbol{e}}_2(\boldsymbol{a} \cdot \nabla b_2) + \hat{\boldsymbol{e}}_3(\boldsymbol{a} \cdot \nabla b_3) \\ &\quad + b_1(\boldsymbol{a} \cdot \nabla \hat{\boldsymbol{e}}_1) + b_2(\boldsymbol{a} \cdot \nabla \hat{\boldsymbol{e}}_2) + b_3(\boldsymbol{a} \cdot \nabla \hat{\boldsymbol{e}}_3) \\ &= \hat{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{a} \cdot \nabla b_1) + \hat{\boldsymbol{e}}_2(\boldsymbol{a} \cdot \nabla b_2) + \hat{\boldsymbol{e}}_3(\boldsymbol{a} \cdot \nabla b_3) \end{aligned}$$

$$
-\frac{a_1b_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\hat{e}_2-\frac{a_1b_1}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\hat{e}_3+\frac{a_2b_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\hat{e}_2
$$

$$
+\frac{a_3b_1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\hat{e}_3-\frac{a_2b_2}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\hat{e}_3-\frac{a_2b_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\hat{e}_1
$$

$$
+\frac{a_3b_2}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\hat{e}_3+\frac{a_1b_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\hat{e}_1-\frac{a_3b_3}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\hat{e}_1
$$

$$
-\frac{a_3b_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\hat{e}_2+\frac{a_1b_3}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\hat{e}_1+\frac{a_2b_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\hat{e}_2
$$

将上式整理后则给出

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}=\hat{e}_1&\left\{\boldsymbol{a}\cdot\nabla b_1+\frac{b_2}{H_1H_2}\left(a_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-a_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)+\frac{b_3}{H_3H_1}\left(a_1\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-a_3\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right)\right\}\\
&+\hat{e}_2\left\{\boldsymbol{a}\cdot\nabla b_2+\frac{b_3}{H_2H_3}\left(a_2\frac{\partial H_2}{\partial q_3}-a_3\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right)+\frac{b_1}{H_1H_2}\left(a_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-a_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)\right\}\\
&+\hat{e}_3\left\{\boldsymbol{a}\cdot\nabla b_3+\frac{b_1}{H_3H_1}\left(a_3\frac{\partial H_3}{\partial q_1}-a_1\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right)+\frac{b_2}{H_2H_3}\left(a_3\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-a_2\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{1.239}
$$

其中

$$
\boldsymbol{a}\cdot\nabla=\frac{a_1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{a_2}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}+\frac{a_3}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}
$$

② 推导 $\Delta\boldsymbol{a}$ 的表达式

根据 1.15 节中的第 15 个公式，有

$$
\Delta\boldsymbol{a}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})
$$

先推导 $\Delta\boldsymbol{a}$ 在 q_1 轴上的投影 $(\Delta\boldsymbol{a})_1$. 利用(1.217)、(1.213)、(1.221)式，则有

$$
\begin{aligned}
(\Delta\boldsymbol{a})_1=&\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left\{\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_2H_3a_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial(H_3H_1a_2)}{\partial q_2}+\frac{\partial(H_1H_2a_3)}{\partial q_3}\right]\right\}\\
&-\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_2}\left\{\frac{H_3}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(H_2a_2)}{\partial q_1}-\frac{\partial(H_1a_1)}{\partial q_2}\right]\right\}\\
&+\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left\{\frac{H_2}{H_3H_1}\left[\frac{\partial(H_1a_1)}{\partial q_3}-\frac{\partial(H_3a_3)}{\partial q_1}\right]\right\}\\
=&\Delta a_1+\frac{2}{H_1^2H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial a_2}{\partial q_1}-\frac{2}{H_1H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\frac{\partial a_2}{\partial q_2}+\frac{2}{H_1^2H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\frac{\partial a_3}{\partial q_1}-\frac{2}{H_1H_3^2}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\frac{\partial a_3}{\partial q_3}\\
&+\left\{\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_2H_3)}{\partial q_1}\right]+\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right]+\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{H_2}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right]\right\}a_1\\
&+\left\{\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_3H_1)}{\partial q_2}\right]-\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right]\right\}a_2\\
&+\left\{\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_1H_2)}{\partial q_3}\right]-\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right]\right\}a_3
\end{aligned}
\tag{1.240}
$$

同理可得

$$
(\Delta\boldsymbol{a})_2=\Delta a_2\frac{2}{H_2^2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\frac{\partial a_3}{\partial q_2}-\frac{2}{H_2H_3^2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\frac{\partial a_3}{\partial q_3}+\frac{2}{H_2^2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\frac{\partial a_1}{\partial q_2}-\frac{2}{H_2H_1^2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial a_1}{\partial q_1}
$$

$$+\left\{\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_3H_1)}{\partial q_2}\right]+\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{H_1}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right]+\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{H_3}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right]\right\}a_2$$

$$+\left\{\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_1H_2)}{\partial q_3}\right]-\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{H_1}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right]\right\}a_3$$

$$+\left\{\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_2H_3)}{\partial q_1}\right]-\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right]\right\}a_1 \tag{1.241}$$

$$(\Delta a)_3=\Delta a_3+\frac{2}{H_3^2H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\frac{\partial a_1}{\partial q_3}-\frac{2}{H_3H_1^2}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\frac{\partial a_1}{\partial q_1}+\frac{2}{H_3^2H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\frac{\partial a_2}{\partial q_3}-\frac{2}{H_3H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\frac{\partial a_2}{\partial q_2}$$

$$+\left\{\frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_1H_2)}{\partial q_3}\right]+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right]+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{H_1}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right]\right\}a_3$$

$$+\left\{\frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_2H_3)}{\partial q_1}\right]-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right]\right\}a_1$$

$$+\left\{\frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_3H_1)}{\partial q_2}\right]-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{H_1}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right]\right\}a_2 \tag{1.242}$$

本章主要参考文献[1]和[2]。

习题

一、张量部分

1.1 证明矢量 $v=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ 垂直于平面 $ax+by+cz=\lambda$。

1.2 证明 $(a\cdot b\times c)r=(a\cdot r)b\times c+(b\cdot r)c\times a+(c\cdot r)a\times b$。

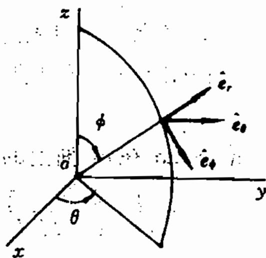
1.3 证明如果 a、b、c 线性相关，则 $a\cdot b\times c=0$。

1.4 已知 D 是任一并矢式而 v 是任一矢量，证明 $\mathrm{D}\cdot v=v\cdot \mathrm{D}_c$。

1.5 证明 $(\mathrm{D}\times v)_c=-v\times \mathrm{D}_c$。

1.6 对于一个反对称并矢式 A 和任一矢量 b，证明 $2b\cdot \mathrm{A}=\mathrm{A}_v\times b$。

1.7 如果 $\mathrm{D}=6\hat{i}\hat{i}+3\hat{i}\hat{j}+4\hat{k}\hat{k}$，$u=2\hat{i}+\hat{k}$，$v=5\hat{j}$，利用直接计算法证明 $\mathrm{D}\cdot(u\times v)=(\mathrm{D}\times u)\cdot v$。



题 1.9

1.8 将球坐标系中的单位三基 $\hat{e}_r$、$\hat{e}_\phi$、$\hat{e}_\theta$ 表成直角坐标系的单位三基 $\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$ 的函数，并证明 $\hat{e}_r=\hat{e}_\phi\times\hat{e}_\theta$。(见题 1.9 图)。

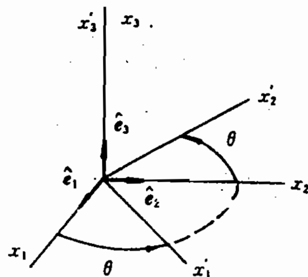
1.9 克罗内克尔符号 δ_{ij} 的指标域为 3，求如下的诸量 (a) δ_{ii}，(b) $\delta_{ij}\delta_{ij}$，(c) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$，(d) $\delta_{ij}\delta_{jk}$，(e) $\delta_{ij}A_{ik}$

1.10 $\in_{ijk}$ 为置换符号，按直接展开的办法证明：(a) $\in_{ijk}\in_{kij}=6$，(b) $\in_{ijk}a_ja_k=0$。

1.11 直角坐标系 $Ox'_1x'_2x'_3$ 是坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 绕 x_3 轴旋转 θ 角而成。确定联系两个标系的标轴之间的变换系数 a_{ij}，并给出矢量 $v=v_1\hat{e}_1+v_2\hat{e}_2+v_3\hat{e}_3$ 在 $Ox'_1x'_2x_3$ 系中的分量。(见题 1.11 图)

1.12 下面的表中给出了两组直角坐标系间的方向余弦部分值，已知两个坐标系均为右手系，请确定表中空白处的余弦值。

1.13 已知 $\{A_{ij}\}$ 和 $\{B_{ij}\}$ 为二阶张量，证明 $\{\lambda A_{ij}+\mu B_{ij}\}$ 也是二阶张量。



题 1.11

1.14 证明$(P_{ijk}+P_{jki}+P_{jik})x_ix_jx_k=3P_{ijk}x_ix_jx_k$。

1.15 已知矢量$a=3\hat{i}+4\hat{k}$，$b=2\hat{j}-6\hat{k}$和并矢式$\mathbf{D}=3\hat{i}\hat{i}+2\hat{i}\hat{k}-4\hat{j}\hat{j}-5\hat{k}\hat{j}$，利用矩阵乘法计算积$a\cdot\mathbf{D}$．$\mathbf{D}\cdot b$，$a\cdot\mathbf{D}\cdot b$.

表(1.12 题)

	x_1	x_2	x_3
x_1'	3/5	−4/5	0
x_2'	0	0	1
x_3'			

1.16 按指标法证明矢量恒等式(1) $\nabla\times\nabla\phi=0$，(2) $\nabla\cdot\nabla\times a=0$。

1.17 确立恒等式

$$\in_{pqs}\in_{mnr}=\begin{vmatrix}\delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms}\\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns}\\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs}\end{vmatrix}$$

1.18 利用上式的结果，证明(a) $\in_{pqs}\in_{snr}=\delta_{pn}\delta_{qr}-\delta_{pr}\delta_{qn}$，(b) $\in_{pqs}\in_{sqr}=-2\delta_{pr}$。

1.19 如果并矢式$\mathbf{B}$是反对称$\mathbf{B}=-\mathbf{B}_c$，证明：$\mathbf{B}_v\times a=2a\cdot\mathbf{B}$。

1.20 证明 $(\mathbf{I}\times v)\cdot\mathbf{D}=v\times\mathbf{D}$。

二、场论部分

1.21 证明下列各式

(1) $\mathrm{grad}(\varphi+\psi)=\mathrm{grad}\varphi+\mathrm{grad}\psi$,

$\mathrm{grad}(\varphi\psi)=\varphi\mathrm{grad}\psi+\psi\mathrm{grad}\varphi$,

$\mathrm{grad}F(\varphi)=F'(\varphi)\mathrm{grad}\varphi$;

(2) $\mathrm{grad}\,\dfrac{1}{r}=-\dfrac{r}{r^3}$，$\mathrm{grad}r^n=nr^{n-2}r$;

(3) $\mathrm{grad}(c\cdot r)=c$;

(4) $\mathrm{grad}\varphi(u(r),v(r))=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{grad}u+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{grad}v$;

(5) $\mathrm{grad}|c\times r|^2=2r(c\cdot c)-2c(r\cdot c)$;

1.22 若$\mathrm{grad}y=\dfrac{m}{n}\mathrm{grad}x$，求$\mathrm{grad}(x^my^n)$的值。

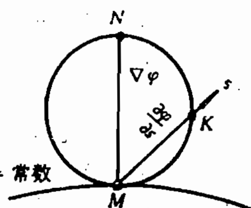
1.23 若在(x,y)平面上

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

求证等位线$\varphi=$常数和$\psi=$常数相互正交。

1.24 设$\varphi=$常数为一等位面，在其上取一点M，过M点在φ的增长方向作法线MN。在$\overline{MN}$取矢量$\mathrm{grad}\varphi$，以$\mathrm{grad}\varphi$为直径作一球面。自M任作一方向s与球面交于K，见图示。试证

$$\overline{MK}=\frac{\partial\varphi}{\partial s}$$



题 1.24

1.25 已知椭圆$r_1+r_2=2a$是函数$\varphi=r_1+r_2$的一个等位线，此处r_1及r_2为动点至两焦点的距离。证明在椭圆上所作的法线平分两向径间的夹角。

1.26 求作卵形线$r_1r_2=a^2$的法线的几何方法，其中r_1，r_2为动点至两焦点A及B的距离。

1.27 给定平面标量场φ。设在M点上已知两个方向的方向导数$\dfrac{\partial\varphi}{\partial s_1}$、$\dfrac{\partial\varphi}{\partial s_2}$，试用几何方法求$M$点上的$\mathrm{grad}\varphi$。

1.28 证明下列各式：

(1) $\mathrm{div}(a_1+a_2)=\mathrm{div}a_1+\mathrm{div}a_2$;

(2) $\mathrm{div}(\varphi a)=\varphi\mathrm{div}a+\mathrm{grad}\varphi\cdot a$;

(3) $\mathrm{div}(a\times b)=b\cdot\mathrm{rot}a+a\cdot\mathrm{rot}b$;

(4) $\mathrm{div}\boldsymbol{r}=3$;

(5) $\mathrm{div}(r\boldsymbol{c})=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}}{r}$,$\mathrm{div}(r^2\boldsymbol{c})=2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}$,其中 $\boldsymbol{c}$ 为一常矢量;

(6) $\mathrm{div}(a\boldsymbol{r})=3a$,$a$ 为一常数标量;

(7) $\mathrm{div}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{2}{r}$;

(8) $\mathrm{div}[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})]=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\mathrm{div}[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})]=4\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$;

$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=0$,其中 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 为常矢量;

(9) $\mathrm{div}r^4\boldsymbol{r}=7r^4$

(10) $\mathrm{div}[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})]=0$,此处 $\boldsymbol{\omega}$ 为常矢量;

(11) $\mathrm{div}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b})]=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,其中 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 为常矢量;

(12) 若 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$,则 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$.

1.29 证明下列各式:

(1) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{rot}\boldsymbol{a}_1+\mathrm{rot}\boldsymbol{a}_2$;

(2) $\mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\,\mathrm{rot}\boldsymbol{a}+\mathrm{grad}\varphi\times\boldsymbol{a}$;

(3) $\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$;

(4) $\mathrm{rot}[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,其中 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是常矢量;

(5) $\mathrm{rot}(r\boldsymbol{a})=\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}}{r}$,其中 $\boldsymbol{a}$ 是常矢量;

(6) 若 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$,则 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\omega}$。

1.30 利用哈密顿符号法和张量表示法证明下列公式:

(1) $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\varphi\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\varphi)+\varphi(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}$;

(2) $(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}$;

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{c}$;

(4) $(\boldsymbol{a}\times\nabla)\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\mathrm{div}\boldsymbol{b}$;

(5) $(\boldsymbol{a}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}=-2\boldsymbol{a}$;

(6) $(\nabla\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{b}+\mathrm{rot}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\mathrm{div}\boldsymbol{b}$.

1.31 证明:

(1) $(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{n}=\mathrm{rot}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$,其中 $\boldsymbol{n}$ 是大小相等方向可变的矢量;

(2) $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot[\mathrm{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})-\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\hat{\boldsymbol{n}})]=\mathrm{div}\boldsymbol{a}$,其中 $\boldsymbol{a}$ 是变矢量,$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是单位常矢量;

(3) $(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\mathrm{div}\boldsymbol{v}$.

1.32 证明下列各积分公式:

(1) $\int_V[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\mathrm{div}\boldsymbol{v}]\mathrm{d}V=\oint_S\boldsymbol{a}v_n\mathrm{d}S$,当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{v}$ 时有

$$\int_V[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\mathrm{div}\boldsymbol{v}]\mathrm{d}V=\oint_S v_n\boldsymbol{v}\mathrm{d}S$$

(2) $\oint_S\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\mathrm{d}S=\boldsymbol{a}V$,其中 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量,$\boldsymbol{r}$ 为矢径,V 是 S 面所包含的体积;

(3) $\oint_S(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\boldsymbol{a}V$,符号意义同上;

(4) $\oint_S\varphi a_n\mathrm{d}S=\int_V(\varphi\,\mathrm{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{d}V$;

(5) $\oint_S(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_n\mathrm{d}S=\int_V[(\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{b})\mathrm{d}V]$;

(6) $\oint_S\varphi\psi\frac{\partial\chi}{\partial n}\mathrm{d}S=\int_V[\varphi\,\mathrm{div}(\psi\,\mathrm{grad}\chi)+\psi\,\mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}\chi]\mathrm{d}V$;

(7) $\oint_S \Delta\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \int_V [(\Delta\varphi)^2 + (\mathrm{grad}\cdot\varphi\,\mathrm{grad}\Delta\varphi)] dV$;

(8) $\oint_S (\boldsymbol{a} \times \mathrm{grad}\varphi)_n dS = \int_V \mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{a} dV$;

(9) $\oint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\mathrm{rot}\boldsymbol{a} \times \Delta\boldsymbol{a}) dS = -\int_V [(\Delta\boldsymbol{a})^2 + \mathrm{rot}\boldsymbol{a} \cdot \Delta\mathrm{rot}\boldsymbol{a}] dV$,其中 $\mathrm{div}\boldsymbol{a} = 0$;

(10) $\oint_L \varphi\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \hat{\boldsymbol{n}} \times \mathrm{grad}\varphi\, dS$;

$\oint_L \varphi \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S [\varphi\, \mathrm{rot}_n \boldsymbol{a} + (\mathrm{grad}\varphi \times \boldsymbol{a})_n] dS$;

(11) $\oint_L u\, \mathrm{d}v = \int_S (\mathrm{grad}u \times \mathrm{grad}v) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS$.

1.38 试利用 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$、$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$ 的定义推导它们在柱坐标和球坐标中的表达式。

1.34 求 $\frac{1}{2}\mathrm{grad}v^2 - \boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ 在曲线坐标、柱坐标及球坐标内的表达式。

1.35 证明

$$\mathrm{grad}q_i = \frac{1}{H_i}\hat{\boldsymbol{e}}_i \quad \text{(在这里 } i \text{ 非作和)}$$

并利用 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}q_i) = 0$ 证明

$$\mathrm{rot}\hat{\boldsymbol{e}}_i = \frac{1}{H_i}\mathrm{grad}H_i \times \hat{\boldsymbol{e}}_i \quad \text{(在这里 } i \text{ 非作和)}$$

参考文献

[1] 吴望一．流体力学．北京:北京大学出版社,1982

[2] Mase G E. Theory and Problems of Continuum Mechanics, McGRAW-HILL BOOK COMPANY,1975

[3] 杜珣．连续介质力学引论．北京:清华大学出版社,1985

[4] Segel L A. Mathematics Applied to Continuum Mechanics, Macmillian Publishing Co., Inc, 1978

[5] Yong E C. Vector and Tensor Analysis, Marcel Dekker, inc,1978

第二章 应力分析

从本章开始，正式研究连续介质力学的问题。本章是应力分析，在应力分析之前，先叙述连续介质力学的基础和出发点——连续介质假设或称连续介质模型(continuous medium hypothesis or continuum models)。

2.1 连续介质假设

力所作用的对象物质(material)即介质(medium)，是由大量的分子(molecule)所组成。分子间的真空尺度远远大于分子本身的尺度，而每个分子又都在不停地作无规则的运动，相互间经常碰撞，交换其动量和能量。因此流体的微观结构和运动(microstructure and motion)，不论在时间还是在空间上都充满着不均匀性、离散性和随机性(inhomogeneous, dispersed and random property)。另一方面，人们用仪器所测量到的或者用肉眼所观察到的介质宏观结构(macrostructure)和运动，却又明显地呈现出局部均匀性、连续性和确定性(homogeneous, continuous and determinate property)。微观运动的不均匀性、离散性及随机性同宏观运动的均匀性、连续性及确定性是如此反差，但又和谐地统一在一个介质之中，从而形成了介质的两个重要的表现侧面。

研究介质的宏观运动有两种不同的途径：第一种办法是统计物理方法(method of Statistical Physics)，该方法是从分子和和原子运动出发，采用统计平均的做法建立起宏观物理量所满足的方程，并对这些量求解。统计物理方法虽然自然、直接，然而它至今尚不能为连续介质力学提供充分的理论依据和有用的信息(information)。第二种方法是建立在连续介质假设的基础之上的宏观研究方法，这是一种极为实用和完全可靠的成功的方法。

所谓连续介质假设，是认为介质的质点(particle)连续地充满介质所占据的空间，没有一点空隙(hole)，即把介质看作由连续不断的质点所构成的体系，质点的存在以其所占据的空间位置来体现。

在上面所提到的质点，实质上是由无穷多个分子所组成的集团，即“质团”(particle group)，它在宏观上表现为小、在微观上却表现很大，即它是“宏观小微观大”(macroscopically small and microscopically big)。一方面，质团的特征尺度 L_1 远远大于分子运动的尺度 L_2(即 $L_1 \gg L_2$)，使得这个集团中包含大量分子，对该分子集团进行统计平均后能得到稳定的数值，这就是“微观大”的含义；另一方面，又要求分子团的尺度 L_1 与所研究问题的特征尺度 L_3 相比是足够小(即 $L_1 \ll L_3$)，使得分子团内的平均物理量可以看成均匀不变，因而可把分子团近似地看成一个几何点(geometric point)，这就是“宏观小”的含意。以上是从空间上对分子团的要求。而从对这个分子团的统计平均时间来看，则要求这个时间是“微观长宏观短”(microscopically long and macroscopically short)，即进行统计平均的时间应选得足够长，使得在这个期间内质团的微观性质在统计平均后能够得到确定的数值。例如，在这段时间里分子间的碰撞已进行了千千万万次；另一方面，进行统计平

均的宏观时间要比所研究问题的特征时间小得多，以致于我们可以把进行平均的时间看成一个瞬间(for an instant)。

连续介质假设在一般情况下是完全合理的。例如，在冰点的温度和一个大气压下(in the case of temperature at freezing-point and one atmos)，1cm^3 气体中所含气体分子数约为 2.7×10^{19}，即使在 10^{-9}cm^3 这样在宏观上看来是很小的体积中也有 2.7×10^{10}个分子。显然，从微观上讲这样的体积还是非常大的。从时间上讲，在上述的温度和压力的条件下，1cm^3 的气体中其分子在 1 秒要碰撞 10^{29}次，即使在 $1\mu s$ 这样在宏观上很短的时间里，在体积为 10^{-9}cm^3 的气体中，其分子仍然要碰撞 10^{14}次，所以说这个时间在微观看来是足够长的了。

在作了连续介质假设之后，研究介质的宏观运动时，就可把本来是大量的离散分子或原子的运动问题近似成连续充满空间的介质质点的运动问题，于是每个空间点在每个时刻都有确定的物理量。质点所具有的宏观物理量，如密度、速度、压力和温度等，都是空间坐标和时间的连续函数。这些物理量满足一切应该遵循的物理规律，如质量守恒、牛顿运动定律、能量守恒定律、热力学定律以及扩散、粘性及热传导等输运性质，从而可利用强有力的数学工具。正因为如此，**连续介质假设乃是连续介质力学的第一个且带有根本性质的假设**。

然而应该指出，连续介质假设虽然能够非常满意地处理绝大多数的宏观力学问题，但是在某些特殊条件下这种假设亦可能有问题。例如，在研究导弹高空飞行时，周围的空气是稀薄的，其分子间的距离很大，它能和物体的特征尺度相比拟，虽然在这样的条件下获得稳定平均值的分子团是存在的，但是不能把这样的分子团作为一个质点了。这样的问题是稀薄气体动力学(Rarefied Gas Dynamics)所要研究的内容。又如激波层(shock layer)内的气体运动问题，由于激波的厚度与分子自由程同量级，所以激波层内的气体只能按分子处理，再也不能作为连续介质(对于在数值计算等将激波层作为连续区近似处理的情形例外，当然这种处理并不是为了求激波层内的量，而是为了计算激波层两边的物理量)。

最后，我们再强调几点：①当在连续介质力学中引进连续介质假设后，将不再考虑介质的分子结构，而将介质近似看成为由介质质点连续无空隙地组成，它的宏观形象是连续体。②在连续介质力学中所说的质点位移，不是指个别分子的位移，而是指含有大量分子的质团位移，尤其当我们说介质质点处于静止状态时，这就是说，它处于原地不动，尽管质团内的分子由于热运动将不断地移动位置。③当我们在连续介质内某一点 A 处取极限时，不管离 A 多么近的地方均有质点存在，并有确定的物理量。一定不要认为：似乎在取极限时会出现"空点"而陷入分子间的真空区的现象。之所以如此看待，是因为已把介质作为宏观连续体了，不再认为其中有分子结构。

2.2 重要的基本概念

2.2.1 均匀性与各向同性

介质的**均匀性**(homogeneity)，是指在所有的质点上都具有同样性质。具有这样性质的物质(即介质)称作均匀物质(homogeneous material)。

各向同性(isotropy)，是指在一个点上在其所有的方向上物质均具有同样的性质。这

样的物质称作各向同性物质(isotropic material)。

各向异性(anisotropy)，是指在一点上在不同方向具有不同性质。这样的物质称作各向异性物质(anisotropic material)。

2.2.2 质量密度

密度(density)的概念是从连续介质中一点邻域的质量与体积之比(mass-volume ratio)演变而来。在图2.1中所给出小体元ΔV，其质量用Δm表示，则在ΔV中介质的平均密度(average density)$\bar{\rho}$为

$$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{2.1}$$

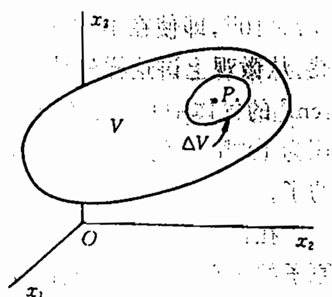


图 2.1

由于作了连续介质假设，因此可以对上式取极限，以求得体元ΔV内某一点P的密度ρ，它为

$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \tag{2.2}$$

ρ为质量密度(mass-density)，简称密度，它为标量。图2.1所示的体积为V介质的质量m为

$$m=\int_V \rho \mathrm{d}V \tag{2.3}$$

2.2.3 体力和面力

力(force)是个矢量，它可用推或拉的直观概念很好地表达。作用在连续介质体各个部分，即各个质点上的有距离力(forces with a distance)称作体力(body forces)。所谓有距离力是指不需同物体接触，相隔一段距离仍起作用的力，如重力和磁力等(gravity and magnetic force etc.)，体力也称作质量力(mass-force)，因它与物体的质量成正比。在连续介质力学中体力往往只指重力。

作用在连续介质面元上的力称作面力(surface forces)，这个面元可以是介质的表面，亦可以是介质内部面，面力是只有与介质直接接触才起作用的力，面力的大小和方向都与作用面的方向有关。方向一定的面元上的面力，其大小又与面元的面积成正比。压力和摩擦力(pressure and friction)都属于面力。

2.2.4 哥西应力法则和应力矢量

所谓应力(stress)是指应力矢量，它是作用在物体(物质)内部单位截面上的力，它是矢量(有方向)。

占据空间区域R的连续介质受到面力$\boldsymbol{f}=(f_i)$和体力$\boldsymbol{b}=(b_i)$的作用，如图2.2所示。由于力可从介质的一部分传递到另一部分，因此在以S为包面的任一体积V内的介质要同该体积之外的介质发生作用。令$\hat{\boldsymbol{n}}=(n_i)$为面元$\Delta S$上的$P$点处的单位外法线；$\Delta\boldsymbol{f}=(\Delta f_i)$为作用在$\Delta S$上的合力，这个力是$V$外介质通过$\Delta S$面对$V$内介质的作用力。很显然，力元$\Delta\boldsymbol{f}$依赖于$\Delta S$的选择和方向$\hat{\boldsymbol{n}}$。作用在$\Delta S$上的力不管是均匀分布还是不均匀分布，它(指这种分布的力)一般都能等价于在ΔS上某一点P处的一个作用合力(resultant force)$\Delta\boldsymbol{f}$和一个力矩(moment)$\Delta\boldsymbol{M}=(\Delta M_i)$，见图2.2。

作用在ΔS上的每单位面积的平均作用力为：$\Delta\boldsymbol{f}/\Delta S$.

哥西应力法则(Cauchy stress principle)是:当ΔS在P点趋于零时,$\Delta f/\Delta S$趋于一定的极限:$\mathrm{d}f/\mathrm{d}S$;而在这取极限过程中Δf绕P点的力矩ΔM同时趋于零。哥西法则的数学表示为

$$\lim_{\Delta S\to 0}\Delta f/\Delta S=\mathrm{d}f/\mathrm{d}S \qquad \lim_{\Delta S\to 0}\Delta M=0 \quad (2.4)$$

如果在取极限过程中,在P点的力矩不为零,则在该点存在一个力偶应力矢量(couple-stress vector)η,在图2.3中以双箭头表示。弹性理论的一个分支以及在磁流体中将考虑这种力偶应力,然而在本书中将不予以考虑。

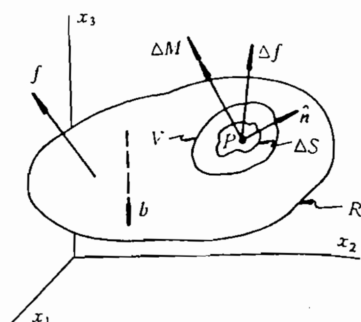


图2.2

式(2.4)所定义的平均应力的极限$\mathrm{d}f/\mathrm{d}S$称作应力矢量(stress vector),以$t^{(\hat{n})}$表示(将应力矢量加上上标($\hat{n}$)是表明它与$\hat{n}$有关),即

$$t^{(\hat{n})}=(t_i^{(\hat{n})})=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta S} \qquad (2.5.1)$$

或写成

$$t_i^{(\hat{n})}=\frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta f_i}{\Delta S} \qquad (2.5.2)$$

从应力矢量的由来看出,它显然与面ΔS的方位有关,过P点的面元方位不同,即面元的法线$\hat{n}$不同,其应力矢量$t^{(\hat{n})}$就不同。

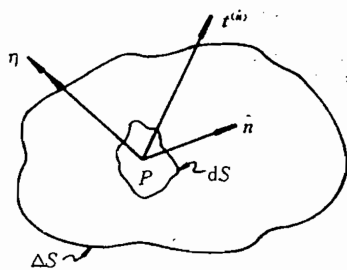


图2.3

如上所考虑的应力矢量是在P点处体积V之外的介质通过面元ΔS对V内介质的作用应力。如果考虑图2.2所示的V内介质对V外介质的作用,则在P点又出现一个矢量$t^{(-\hat{n})}$,按作用与反作用的牛顿定律(Newton's law)应有

$$t^{(-\hat{n})}=-t^{(\hat{n})} \qquad \text{或} \qquad t_i^{(-\hat{n})}=-t_i^{(\hat{n})} \qquad (2.6)$$

应力矢量$t^{(-\hat{n})}$通常称作面力矢量(traction vector)。

2.3 应力张量

2.3.1 应力张量的引出

哥西应力法则把过连续介质中任一点P朝某个方向($\hat{n}$)的面上的应力矢量$t^{(\hat{n})}$,同该面的单位法线$\hat{n}$联系起来,面的方向不同,其上的应力矢量$t^{(\hat{n})}$就不同。图2.4对此作了说明。在P点所有的应力矢量$t^{(\hat{n})}$同其相应的单位法线$\hat{n}$一起确定了该点的应力状态(state of stress),可是这样的应力矢量与其相应的法线是无穷多的;然而非常幸运,实际不必把描述P点应力状态的所有应力矢量与相应的法线都给出,只要给出在P点的三个相互垂直面上的各自应力矢量就能达到目的,利用一定的关系式(见2.3.2段)就可把过该点任一个面上的应力矢量同上述的三个应力矢量联系起来。

为了确定一点的应力状态,我们过这一点作垂直坐标轴的三个坐标平面(coordinate

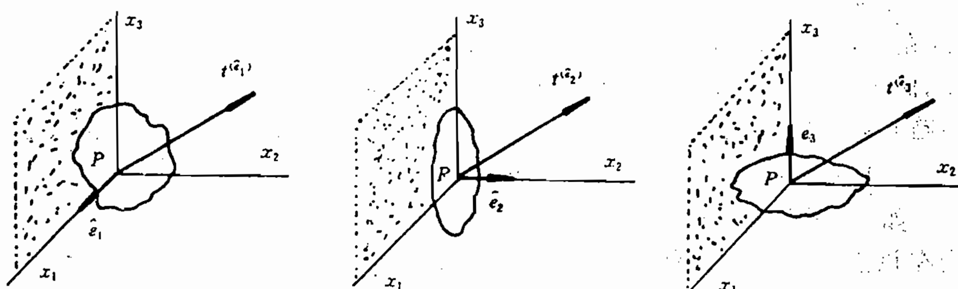


图 2.4

plane)，如图 2.4 所示，在该图上给出了各坐标平面的单位法线与其上的应力矢量。为了方便表述，我们再将图 2.4 的三个分幅图合在一起，见图 2.5。

图 2.5

按照(1.69)式，上面所提到的三个坐标平面上的应力矢量，其每一个都可利用笛卡尔坐标分量来表示，即有

$$\begin{cases} t^{(\hat{e}_1)} = t_1^{(\hat{e}_1)}\hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_1)}\hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_1)}\hat{e}_3 \\ t^{(\hat{e}_2)} = t_1^{(\hat{e}_2)}\hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_2)} + t_3^{(\hat{e}_2)}\hat{e}_3 \\ t^{(\hat{e}_3)} = t_1^{(\hat{e}_3)}\hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_3)} + t_3^{(\hat{e}_3)}\hat{e}_3 \end{cases} \tag{2.7}$$

这三个矢量的九个分量就是二阶笛卡尔张量 Σ 的分量 σ_{ij}，即

$$t_j^{(\hat{e}_i)} \equiv \sigma_{ij} \tag{2.8}$$

Σ 称作应力张量(stress tensor)，它等价一个应力并矢式。这个应力张量按分量和矩阵的明确表示如下

$$\Sigma = \sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j = \{\sigma_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix} \tag{2.9.1}$$

或表成

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{2.9.2}$$

图 2.6 展示了应力张量在各个坐标平面上的分量，在这些分量中垂直于坐标平面的那三个分量($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$)称作正应力或法向应力(normal stress)；而在坐标平面内(亦即与坐标平面相切)的那些分量($\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$)称作剪应力或切应力(shear stress)。作用在坐标轴的正方向的应力分量，亦即在其外法线指向坐标轴正方向的

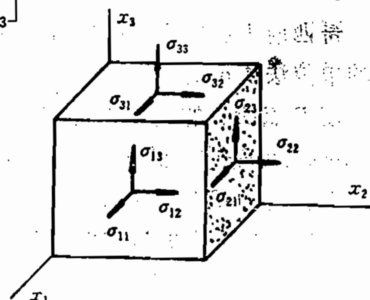


图 2.6

平面上的应力分量为正的。分量σ_{ij}是作用在其外法线平行第i坐标轴的平面上、并指向第j坐标轴向的分量。在图 2.6 所示的应力分量全是正的。

2.3.2 应力张量与应力矢量的关系

在一点P处的应力张量Σ与该点任意方向面上的应力矢量$t^{(\hat{n})}$的关系可以这样确定：这就是以P点为顶点作一个小四面体(tetrahedron)，见图 2.7，然后考虑在这个四面体上力的平衡或动量平衡，从而得出应力矢量与应力张量的关系。

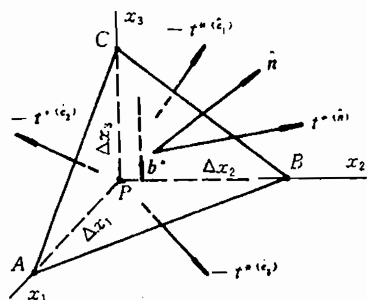


图 2.7

四面体的底面ABC的法线为$\hat{n}$，其他三个面是相互垂直的坐标平面，如图 2.7 所示。设四面体底面ABC的面积为ΔS，则其他三个面的面积为ΔS的投影，即

$$
\begin{cases}
CPB\text{ 的面积 }\Delta S_1\text{ 为：} & \Delta S_1 = \dfrac{1}{2}\Delta x_2 \Delta x_3 = \Delta S n_1 \\
APC\text{ 的面积 }\Delta S_2\text{ 为：} & \Delta S_2 = \dfrac{1}{2}\Delta x_1 \Delta x_3 = \Delta S n_2 \\
BPA\text{ 的面积 }\Delta S_3\text{ 为：} & \Delta S_3 = \dfrac{1}{2}\Delta x_2 \Delta x_1 = \Delta S n_3
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

这些投影面积的归纳表示如下：

$$\Delta S_i = \Delta S(\hat{n}\cdot\hat{e}_i) = \Delta S\cos(\hat{n},\hat{e}_i) = \Delta S n_i \tag{2.11}$$

其中

$$\hat{n} = n_i\hat{e}_i = (n_i)$$

在图 2.7 画出了作用在四面体上的平均的单位质量的体力b^*、作用在ABC面上的平均面力矢量$t^{*(\hat{n})}$、作用在CPB面上的平均面力矢量$-t^{*(\hat{e}_1)}$、作用在APC面上的平均面力矢量$-t^{*(\hat{e}_2)}$、作用在BPA面上的平均面力矢量$-t^{*(\hat{e}_3)}$，作用在四面体上还有惯性力$-\rho_* a_* \Delta V$(在图上没有标出)，其中ρ_*、a_*、ΔV为四面体的平均密度、加速度和体积。

根据达朗伯原理(d'Alembert's principle)，作用在四面体上的惯性力、体力以及面力之和应为零，即达到动平衡(dynamic farce equilibrium)，于是有

$$
\begin{aligned}
t^{*(\hat{n})}\Delta S - t^{*(\hat{e}_1)}\Delta S_1 - t^{*(\hat{e}_2)}\Delta S_2 - t^{*(\hat{e}_3)}\Delta S_3 + \\
+ \rho_* b^* \Delta V - \rho_* a_* \Delta V = 0
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

而体积ΔV

$$\Delta V = \frac{1}{6}\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \frac{1}{3}S\Delta h \tag{2.13}$$

其中Δh为P点到底面ABC的距离。将(2.10)和(2.13)式代人(2.12)中，则给出

$$t^{*(\hat{n})} - t^{*(\hat{e}_1)}n_1 - t^{*(\hat{e}_2)}n_2 - t^{*(\hat{e}_3)}n_3 + \rho_*(b^* - a_*)\Delta h = 0$$

当体元收缩到P点时，$\Delta h\to 0$、$t^{*(\hat{n})}\to t^{(\hat{n})}$、$t^{*(\hat{e}_i)}\to t^{(\hat{e}_i)}$，则上式变成在$P$点的面力关系式

$$t^{(\hat{n})} = n_1 t^{(\hat{e}_1)} + n_2 t^{(\hat{e}_2)} + n_3 t^{(\hat{e}_3)} \tag{2.14}$$

这就是在一点P上的任一面上的应力矢量与三个坐标平面上的应力矢量的关系。由于

$$\begin{cases} t^{(\hat{n})} = t_i^{(\hat{n})}\hat{e}_i = (t_i^{(\hat{n})}) \\ t^{(\hat{e}_i)} = t_j^{(\hat{e}_i)}\hat{e}_j = (t_j^{(\hat{e}_i)}) \\ t_j^{(\hat{e}_i)} = \sigma_{ij} \end{cases}$$

于是(2.14)式可以写成

$$t_j^{(\hat{n})} = n_i\sigma_{ij} \quad \text{或} \quad t^{(\hat{n})} = \hat{n}\cdot\Sigma \tag{2.15}$$

如果令：$t_{1j}^{(\hat{n})}=t_j^{(\hat{n})}$，$n_{1k}=n_k$，则上式可以表成矩阵形式

$$[t_{1j}^{(\hat{n})}] = [n_{1k}][\sigma_{kj}] \tag{2.16.1}$$

或写成

$$[t_1^{(\hat{n})}, t_2^{(\hat{n})}, t_3^{(\hat{n})}] = [n_1, n_2, n_3]\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{2.16.2}$$

上式可以化成分量方程

$$\left.\begin{aligned} t_1^{(\hat{n})} &= n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31} \\ t_2^{(\hat{n})} &= n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{32} \\ t_3^{(\hat{n})} &= n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} + n_3\sigma_{33} \end{aligned}\right\} \tag{2.16.3}$$

式(2.15)～(2.16)就是应力矢量与应力张量关系的几种写法。

2.4 应力张量的对称性及其变换规律

2.4.1 应力张量的对称性

任一个处于动态平衡(motional equilibrium)的连续介质体 V，见图 2.8，受面力 $\boldsymbol{t}^{(\hat{n})}$ 和单位质量的体力 $\boldsymbol{b}$ 的作用。根据达朗伯原理，作用体积 V 上除了合力(包括惯性力)为零外，动量矩(moment of momentum)之和亦应为零，即有

$$\oint_S \boldsymbol{t}^{(\hat{n})}\mathrm{d}_1S + \int_V \rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}V - \int_V \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = 0 \tag{2.17}$$

$$\oint_S \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{t}^{(\hat{n})}\mathrm{d}S + \int_V \boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}V - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V + \boldsymbol{\xi} = 0 \tag{2.18}$$

其中：$\boldsymbol{r}$——位置矢量；$\boldsymbol{v}$——质点速度；ρ——质量密度；S 为 V 的包面；$\boldsymbol{\xi}$——为力偶矢量 η 所产生的力矩之和(注意 η 在(2.17)式中不出现，因它是力偶，在任一点处都正负抵消)，由 η 产生的力矩称**分布力矩**(distributed moment)。

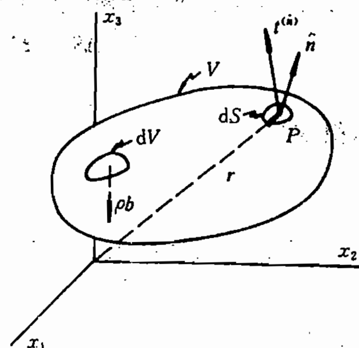


图 2.8

如果不存在分布力矩，即

$$\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{2.19}$$

则利用(2.15)和(2.17)式，可从(2.18)式推出(详细推导，见第四章第 3 节)：

$$\int_V \Sigma_v \mathrm{d}V = 0 \quad \text{或} \quad \int_V \in_{ijk}\sigma_{jk}\mathrm{d}V = 0 \tag{2.20}$$

由于 V 是任取的，因此上式中的对偶矢量(见(1.110)式)Σ_v 应为零，即有

$$\Sigma_v = \sigma_{ij}\hat{e}_i \times \hat{e}_j = (\in_{kij}\sigma_{ij}) = 0 \tag{2.21}$$

由上式可推出：$\sigma_{12}=\sigma_{21}$，$\sigma_{23}=\sigma_{32}$，$\sigma_{13}=\sigma_{31}$，即有

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad 或 \qquad \Sigma = \Sigma_c \tag{2.22}$$

从而说明，在没分布力矩存在时，应力张量是对称的(symmetric)。

2.4.2　**应力张量的变换规律**

在图 2.9 给出了在 P 点的两个坐标系统 $Px_1x_2x_3$ 和 $Px'_1x'_2x'_3$，它们均为直角笛卡尔坐标系，其之间的关系由方向余弦表给出。

表 2.1

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

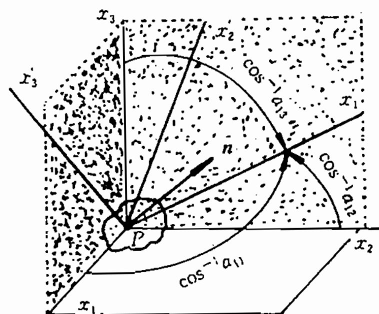


图 2.9

这些方向余弦构成一个变换张量(并矢式)**A**

$$\mathbf{A} = a_{ij}\hat{e}'_i\hat{e}_j \tag{2.23}$$

按照一阶笛卡尔张量的变换规律(1.95)式，一个应力矢量在不带撇坐标系中的分量 $t_i^{(\hat{n})}$ 与在带撇坐标系中的分量 $t_i'^{(\hat{n})}$ 之间的关系由下式给出

$$t_i'^{(\hat{n})} = a_{ij}t_j^{(\hat{n})} \qquad 或 \qquad \boldsymbol{t}'^{(\hat{n})} = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{t}^{(\hat{n})} \tag{2.24}$$

根据二阶笛卡尔张量的变换律(1.102)式，应力张量在两个坐标系的分量由下式给出：

$$\sigma'_{ij} = a_{ip}a_{jq}\sigma_{pq} \qquad 或 \qquad \Sigma' = \mathbf{A}\cdot\Sigma\cdot\mathbf{A}_c \tag{2.25}$$

按矩阵表示的应力张量的变换规律表成

$$[t_{i1}^{\prime(\hat{n})}] = [a_{ij}][t_{j1}^{(\hat{n})}] \tag{2.26}$$

其中　$t_{i1}^{\prime(\hat{n})}=t_i'^{(\hat{n})}$，$t_{i1}^{(\hat{n})}=t_i^{(\hat{n})}$，上式亦可写成

$$[\sigma'_{ij}] = [a_{ip}][\sigma_{pq}][a_{qj}] \tag{2.27}$$

式(2.26)和(2.27)的矩阵乘法的明确表示分别为

$$\begin{bmatrix} t_1'^{(\hat{n})} \\ t_2'^{(\hat{n})} \\ t_3'^{(\hat{n})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^{(\hat{n})} \\ t_2^{(\hat{n})} \\ t_3^{(\hat{n})} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

2.4.3　**哥西应力二次型(曲面)**

考虑连续介质中一点 P 处的应力张量，张量相对局部笛卡尔坐标系 $P\zeta_1\zeta_2\zeta_3$(见图 2.10)的分量为 σ_{ij}。以 σ_{ij} 构成一个二次方程

$$\sigma_{ij}\zeta_i\zeta_j = \pm k^2 = \text{const} \tag{2.30}$$

上式的正负号的选取是保证二次方程所构成的曲面是实的，式中 k 的不同取值则构成一

系列以 P 为同心的实二次曲面。

设 r 为曲面上任一点的位置矢量，它的坐标分量 $\zeta_i=rn_i$，其中 n_i 为 r 向的单位矢量 $\hat{n}$ 的分量，即 $\hat{n}=n_i\hat{e}_i$；$t^{(\hat{n})}$ 为在 P 点以 $\hat{n}$ 为法线的面元 dS 上的应力矢量，它的法向分量 σ_N 为

$$\sigma_N = t^{(\hat{n})}\cdot\hat{n} = \hat{n}\cdot\Sigma\cdot\hat{n} = \sigma_{ij}n_in_j \qquad (2.31)$$

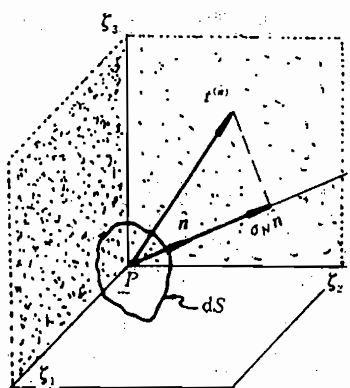


图 2.10

已知

$$\begin{cases} r = \zeta_i\hat{e}_i, \\ r^2 = \zeta_k\zeta_k, \\ \hat{n} = n_i\hat{e}_i = r/r = \zeta_i/r\hat{e}_i \end{cases} \qquad (2.32)$$

如果令 $\sigma_N r^2$ 等于(2.30)式右边的常数$\pm k$，则得到与(2.30)同等的式子

$$\sigma_N r^2 = \sigma_{ij}\zeta_i\zeta_j = \pm k \qquad (2.33)$$

这个曲面方程称作哥西应力二次型(stress quadric of Cauchy)。由上式可得出，在从二次曲面上某一点 Q 的位置矢量 r 为法线的面元 dS(见图 2.10 和图 2.11)上的应力矢量 $t^{(\hat{n})}$ 的法向分量 σ_N 与 r^2 成反比，即

$$\sigma_N = \pm k^2/r^2 \qquad (2.34)$$

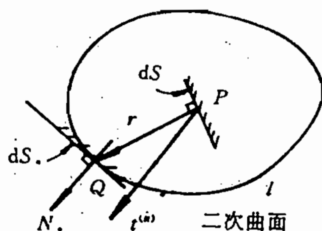


图 2.11

同时从(2.33)式还可推出，在 P 点面元 dS 的应力矢量 $\hat{t}^{(\hat{n})}$ 平行于二次曲面在 Q 点的法线 N.，见图 2.11，亦即 $t^{(\hat{n})}$ 垂直过 Q 点的切平面 dS.。图 2.11 是式(2.33)所示的二次曲面与过 r 和 $\hat{t}^{(\hat{n})}$ 的平面所截的截面。

2.5 主应力和应力不变量

2.5.1 关于主应力

在连续介质的 P 点，其应力张量的分量为 σ_{ij}，据式(2.15)有：$t_i^{(\hat{n})}=\sigma_{ji}n_j$，它把应力矢量 $\hat{t}^{(\hat{n})}$ 同它所在平面的单位法线 $\hat{n}$ 联系起来，一般讲 $\hat{t}^{(\hat{n})}$ 与 $\hat{n}$ 方向不同。如果过 P 点朝某个方向的面上的应力矢量与该面的法线 $\hat{n}$ 共线(collinear)，如图 2.12 所示，这样的法线 $\hat{n}$ 向称主应力方向(principal stress directions)，简称主方向。对于在主方向有

$$\begin{aligned} \hat{t}^{(\hat{n})} &= \hat{n}\cdot\Sigma = \sigma\hat{n} \\ &= \Sigma_c\cdot\hat{n} = \Sigma\cdot\hat{n} = \sigma\hat{n} \qquad (2.35.1) \\ &(\because \Sigma_c = \Sigma) \end{aligned}$$

或写成

$$t_i^{(\hat{n})} = n_j\sigma_{ji} = \sigma_{ij}n_j = \sigma n_i \qquad (2.35.2)$$

式中 σ 为应力矢量的值，在此情况下它称作主应力值(principal stress value)。利用恒等式 $n_i=\delta_{ij}n_j$ 或 $\hat{n}=\mathbf{I}\cdot\hat{n}$，则由(2.35)式推出

$$(\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij})n_j = 0 \qquad 或 \qquad (\Sigma-\sigma\mathbf{I})\cdot\hat{n} = 0 \qquad (2.36)$$

如上的方程实质上是三个方程，而未知量是 4 个，即 3 个方向余弦值(n_1、n_2、n_3)和 1 个主应力值 σ。

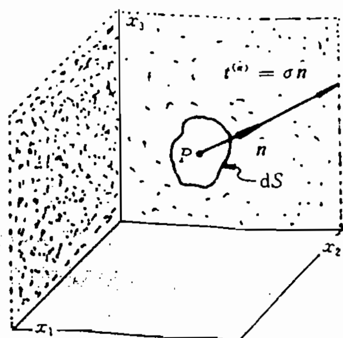


图 2.12

如果(2.36)式对 n_i 有非平凡解(untrival solutions)，即 $n_i\neq 0$，则(2.36)式所构成的方程组之系数行列式必定为零，即有

$$|\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}|=0$$

或写成

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma \end{vmatrix}=0 \qquad (2.37)$$

将上式展开则推出作为 σ 的三次多项式(cubic polynomial)

$$\sigma^3-\mathrm{I}_\Sigma\sigma^2+\mathrm{II}_\Sigma\sigma-\mathrm{III}_\Sigma=0 \qquad (2.38)$$

其中

$$\begin{cases} \mathrm{I}_\Sigma=\sigma_{ii}=\mathrm{tr}\Sigma \\ \mathrm{II}_\Sigma=\dfrac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj}-\sigma_{ij}\sigma_{ij}) \\ \mathrm{III}_\Sigma=|\sigma_{ij}|=\det\Sigma \end{cases} \qquad (2.39)$$

由式(2.38)可以求得三个解 $\sigma_{(1)}$、$\sigma_{(2)}$、$\sigma_{(3)}$，这三个量就是所要求的主应力值。

由于应力张量是实数，亦即各分量为实数(real number)，而且是对称的，所以主应力值也是实数，证明如下：据(2.35.1)式，有

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=\sigma\hat{\boldsymbol{n}} \qquad (2.40)$$

将上式两边左点乘以 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的共轭复数(conjugate complex number)$\bar{\hat{\boldsymbol{n}}}$，则有

$$\bar{\hat{\boldsymbol{n}}}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=\bar{\hat{\boldsymbol{n}}}\cdot\sigma\hat{\boldsymbol{n}}=\sigma n^2 \qquad (2.41)$$

再将(2.40)式两边同时取共轭，并注意到积之共轭等于共轭之积，于是有

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}=\bar{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\bar{\hat{\boldsymbol{n}}}=\bar{\sigma}\,\bar{\hat{\boldsymbol{n}}}$$

将该式两边右点乘以 $\hat{\boldsymbol{n}}$，则推出

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\bar{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\bar{\hat{\boldsymbol{n}}}=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\bar{\sigma}\,\bar{\hat{\boldsymbol{n}}}=\bar{\sigma}n^2 \qquad (2.42)$$

由于

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\bar{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\bar{\hat{\boldsymbol{n}}}=\bar{\hat{\boldsymbol{n}}}\cdot\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_c\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \\ \bar{\boldsymbol{\Sigma}}=\boldsymbol{\Sigma}\text{(因应力张量为实数)} \\ \boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Sigma}_c\text{(因应力张量对称)} \end{cases} \qquad (2.43)$$

所以由(2.42)和(2.43)式推出

$$\bar{\hat{\boldsymbol{n}}}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=\bar{\sigma}n^2 \qquad (2.44)$$

将式(2.41)和(2.44)相减，则推出

$$(\sigma-\bar{\sigma})n^2=0 \qquad (2.45)$$

由于 $n^2\neq 0$(实际上 $n^2=1$)，所以

$$\sigma = \bar{\sigma} \tag{2.46}$$

从而证明了主应力值为实数。

2.5.2 关于应力不变量

式(2.39)所定义的 I_Σ、II_Σ、III_Σ 分别称作第一、第二和第三应力不变量(first, second and third stress invariants)。它们之所以被称作不变量，是由于在坐标系发生旋转时它们的值不变，尽管坐标系不同其应力分量也不同。证明如下：

先证主应力 σ 不随坐标系改变。设图 2.12 所示的坐标系 $x_1x_2x_3$ 变成了 $x_1'x_2'x_3'$ 坐标系，据矢量和张量的变换规律(2.24)和(2.25)式，在该坐标系下的应力张量 Σ' 和主方向 $\hat{n}'$ 则为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Sigma}' = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{A}_c \\ \hat{\boldsymbol{n}}' = \mathbf{A}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\end{cases} \tag{2.47}$$

据(2.35.1)式，在新坐标系中应力张量与主应力 σ' 的关系应为

$$\boldsymbol{\Sigma}'\cdot\hat{\boldsymbol{n}}' = \sigma'\hat{\boldsymbol{n}}' \tag{2.48}$$

将(2.47)式代入上式中则有

$$(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{A}_c)\cdot(\mathbf{A}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}) = \sigma'\mathbf{A}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$$

即有

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{I}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \sigma'\mathbf{A}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$$

将上两边点乘以 $\mathbf{A}_c$，有

$$\mathbf{A}_c\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \mathbf{A}_c\cdot\sigma'\mathbf{A}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$$

即有

$$\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \sigma'\mathbf{I}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$$

即有

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \sigma'\hat{\boldsymbol{n}} \tag{2.49}$$

将上式与(2.40)式对比则推出

$$\sigma' = \sigma \tag{2.50}$$

即主应力不随坐标系改变而改变，在任一坐标系下都取同样的值。

由上式和(2.48)式则推出求 σ' 的方程

$$\sigma^3 - \mathrm{I}_\Sigma'\sigma^2 + \mathrm{II}_\Sigma'\sigma - \mathrm{III}_\Sigma' = 0 \tag{2.51}$$

将该式与(2.38)式相比，则推出

$$\mathrm{I}_\Sigma' = \mathrm{I}_\Sigma,\ \mathrm{II}_\Sigma' = \mathrm{II}_\Sigma,\ \mathrm{III}_\Sigma' = \mathrm{III}_\Sigma \tag{2.52}$$

从而证明 I_Σ、II_Σ、III_Σ 是不变量。

2.6 关于应力张量的主方向

式(2.38)解出三个主应力值，并且它们为实数。对于每个主应力 $\sigma_{(k)}$ 都对应一个方向 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(k)} = n_i^{(k)}\hat{e}_i$，将各个主应力值代入(2.36)式中便求得各个主方向，其求解的方程为

$$\begin{cases}(\sigma_{ij} - \sigma_{(k)}\delta_{ij})n_j^{(k)} = 0 \\ \text{或} \\ (\boldsymbol{\Sigma} - \sigma_{(k)}\mathbf{I})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(k)} = 0\end{cases} \quad (k = 1,2,3) \tag{2.53}$$

将上式展写开则为如下方程组

$$\begin{cases}(\sigma_{11}-\sigma_{(k)})n_1^{(k)}+\sigma_{12}n_2^{(k)}+\sigma_{13}n_3^{(k)}=0\\ \sigma_{21}n_1^{(k)}+(\sigma_{22}-\sigma_{(k)})n_2^{(k)}+\sigma_{23}n_3^{(k)}=0 \qquad (k=1,2,3,)\\ \sigma_{31}n_1^{(k)}+\sigma_{32}n_2^{(k)}+(\sigma_{33}-\sigma_{(k)})n_3^{(k)}=0\end{cases} \tag{2.54}$$

对于每给定一个 $\sigma_{(k)}$ 便可求一组对应的 $n_1^{(k)}$、$n_2^{(k)}$、$n_3^{(k)}$，即求得一个主方向 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(k)}$。由于如上的线性方程组系数全为实数，所以 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(k)}$ 为实数。因此可求出三个实际存在的主方向 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}$、$\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}$、$\hat{\boldsymbol{n}}^{(3)}$。

当然，如果要确定出单位矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(k)}$ 的分量的确切值，还须加如下条件

$$\hat{\boldsymbol{n}}^{(k)}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(k)}=1$$

2.6.1 在 $\sigma_{(1)}\neq\sigma_{(2)}\neq\sigma_{(3)}\neq\sigma_{(1)}$ 的情况下

在三个主应力不等的情况下，$\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}$、$\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}$、$\hat{\boldsymbol{n}}^{(3)}$ 必定相互垂直，据(2.35.1)式，则有

$$\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}\cdot\Sigma=\sigma_{(1)}\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}$$

$$\Sigma\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}=\sigma_{(2)}\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}$$

将上式第一式两边右点乘以 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}$，将第二式两边左点乘以 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}$，则推出

$$\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}\cdot\Sigma\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}=\sigma_{(1)}\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}\cdot\Sigma\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}=\sigma_{(2)}\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}=\sigma_{(2)}\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}$$

将如上两式相减，则给出

$$(\sigma_{(1)}-\sigma_{(2)})\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}=0 \tag{2.55}$$

由于 $\sigma_{(1)}\neq\sigma_{(2)}$，所以推出

$$\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}=0$$

即 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}$ 与 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}$ 正交。同理可推出 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}$ 与 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(3)}$ 正交、$\hat{\boldsymbol{n}}^{(3)}$ 与 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}$ 正交，即三个主方向相互垂直

$$\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}\perp\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)},\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}\perp\hat{\boldsymbol{n}}^{(3)},\hat{\boldsymbol{n}}^{(3)}\perp\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)} \tag{2.56}$$

由于三个主应力不等的情况下存在着三个相互垂直的主方向。现在以这三个主方向为坐标轴构成一个右手直角坐标系，令各坐标轴的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_1=\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}$、$\hat{\boldsymbol{e}}_2=\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}$、$\hat{\boldsymbol{e}}_3=\hat{\boldsymbol{n}}^{(3)}$。在此坐标系下应力张量 Σ 变成 Σ^*，Σ^* 表成

$$\Sigma^*=\sigma_{ij}^*\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j \tag{2.56}$$

将上式两边点乘 $\hat{\boldsymbol{e}}_k$，则有

$$\Sigma^*\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_k=\sigma_{ij}^*\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_k=\sigma_{ik}^*\hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{2.57}$$

又因 $\hat{\boldsymbol{e}}_k$ 为一个主方向，且据(2.50)式主应力不随坐标系改变而变化，故有

$$\Sigma^*\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_k=\sigma_{(k)}\hat{\boldsymbol{e}}_k, \qquad (k\ \text{非作和}) \tag{2.58}$$

将(2.57)和(2.58)式联立则推出

$$\begin{cases}\sigma_{ik}^*\hat{\boldsymbol{e}}_i=\sigma_{(k)}\hat{\boldsymbol{e}}_k\\ \text{或}\\ \sigma_{ij}^*=\sigma_{(j)}\delta_{ij}\end{cases}, \qquad (k,j\ \text{非作和}) \tag{2.59}$$

即在主方向的坐标系中应力张量是对角矩阵形式

$$[\sigma_{ij}^*]=\begin{bmatrix}\sigma_{(1)} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{(2)} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{(3)}\end{bmatrix} \tag{2.60}$$

2.6.2 在$\sigma_{(1)}=\sigma_{(2)}=\sigma_{*}\neq\sigma_{(3)}$的情况下

在这种情况下，则意味式(2.38)有重根σ_*，从而有$\hat{n}^{(1)}=\hat{n}^{(2)}$，即只能求出两个主方向。按如上的证明，当然有$\hat{n}^{(1)}=\hat{n}^{(2)}\perp\hat{n}^{(3)}$，但与这两个方向垂直的另一个方向$\hat{e}_2$也是主方向，证明如下：

以$\hat{n}^{(1)}(=\hat{n}^{(2)})$、$\hat{e}_2$、$\hat{n}^{(3)}$这三个单位矢量的方向构成一个右手直角坐标系，为了表述方便，令

$$\begin{cases}\hat{n}^{(1)}=\hat{n}^{(2)}\equiv\hat{e}_1\\ \hat{n}^{(3)}=\hat{e}_3\\ \hat{e}_2=\hat{e}_3\times\hat{e}_1\end{cases}$$

在此直角坐标系中，应力张量Σ变成Σ^*

$$\Sigma^*=\sigma_{ij}^*\hat{e}_i\hat{e}_j \tag{2.61}$$

将上式两边点乘以$\hat{e}_1$，则有

$$\Sigma^*\cdot\hat{e}_1=\sigma_{ij}^*\hat{e}_i\hat{e}_j\cdot\hat{e}_1=\sigma_{i1}^*\hat{e}_i\equiv\sigma_*\hat{e}_1$$

于是推出

$$\sigma_{11}^*=\sigma_*\quad,\quad\sigma_{21}^*=0\quad,\quad\sigma_{31}^*=0 \tag{2.62}$$

将(2.61)式两边点乘以$\hat{e}_3$，则有

$$\Sigma^*\cdot\hat{e}_3=\sigma_{ij}^*\hat{e}_i\hat{e}_j\cdot\hat{e}_3=\sigma_{i3}^*\hat{e}_i\equiv\sigma_{(3)}\hat{e}_3$$

于是推出

$$\sigma_{13}^*=0\quad,\quad\sigma_{23}^*=0\quad,\quad\sigma_{33}^*=\sigma_{(3)} \tag{2.63}$$

将(2.61)式两边点乘以$\hat{e}_2$，有

$$\Sigma^*\cdot\hat{e}_2=\sigma_{ij}^*\hat{e}_i\hat{e}_j\cdot\hat{e}_2=\sigma_{i2}^*\hat{e}_i \tag{2.64}$$

据(2.62)和(2.63)式以及Σ^*的对称性，则有

$$\sigma_{21}^*=\sigma_{12}^*=0\quad,\quad\sigma_{32}^*=\sigma_{23}^*=0 \tag{2.65}$$

于是由(2.64)式推出

$$\Sigma^*\cdot\hat{e}_2=\sigma_{22}^*\hat{e}_2 \tag{2.66}$$

从而证明$\hat{e}_2$是个主方向。

由于$\sigma_{(1)}=\sigma_{(2)}=\sigma_*$，所以$\sigma_*$是原坐标系中应力张量的特征方程(2.38)式的一个重根，即(2.38)式的左边式子可分解成$(\sigma-\sigma_*)^2(\sigma-\sigma_{(3)})$，亦即有下式成立

$$\sigma^3-\mathrm{I}_\Sigma\sigma^2+\mathrm{II}_\Sigma\sigma-\mathrm{III}_\Sigma\equiv(\sigma-\sigma_*)^2(\sigma-\sigma_{(3)})$$

从而推出

$$\mathrm{I}_\Sigma=2\sigma_*+\sigma_{(3)}$$

由于I_Σ是应力张量的第一不变量，它当然亦是新坐标系中应力张量(见(2.61)式)的第一不变量，故有

$$\mathrm{I}_\Sigma=\sigma_*+\sigma_{22}^*+\sigma_{(3)}\equiv2\sigma_*+\sigma_{(3)} \tag{2.67}$$

于是推出$\hat{e}_2$方向的主应力σ_{22}^*为

$$\sigma_{22}^*=\sigma_* \tag{2.68}$$

在$\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$、$\hat{e}_3$为标轴方向的直角坐标系中，应力张量Σ^*的矩阵表示为

$$[\sigma_{ij}^*]=\begin{bmatrix}\sigma_* & 0 & 0\\ 0 & \sigma_* & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{(3)}\end{bmatrix} \tag{2.69}$$

事实上，可以证明在垂直于 $\hat{e}_3$ 的平面上的任何方向都是主应力方向，且主应力值等于 σ_*。现证明如下：设 $\hat{e}_*$ 为垂直于 $\hat{e}_3$ 平面内任一单位矢量，因此它可表成 $\hat{e}_1$ 和 $\hat{e}_2$ 的线性组合，即可写成

$$\hat{e}_* = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 \tag{2.70}$$

其中 b_1 和 b_2 为组合系数。将应力张量 Σ^* 点乘以 $\hat{e}_*$，有

$$\begin{aligned}\Sigma^* \cdot \hat{e}_* &= \Sigma^* \cdot (b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2)\\ &= b_1\Sigma^* \cdot \hat{e}_1 + b_2\Sigma^* \cdot \hat{e}_2\\ &= b_1\sigma_*\hat{e}_1 + b_2\sigma_*\hat{e}_2 = \sigma_*(b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2) = \sigma_*\hat{e}_*\end{aligned}$$

即有

$$\Sigma^* \cdot \hat{e}_* = \sigma_*\hat{e}_* \tag{2.71}$$

上式则说明 $\hat{e}_*$ 是主方向、σ_* 为主应力值。因 $\hat{e}_*$ 是在垂直 $\hat{e}_3$ 的平面内任取的，所以在该面内任一方向都是主方向且主值不变为 σ_*。

2.6.3 **在 $\sigma_{(1)}=\sigma_{(2)}=\sigma_{(3)}=\sigma_*$ 的情况下**

在此情况下，任一方向都是主方向且主值总为 σ_*，即应力张量 Σ 为

$$\Sigma = \sigma_*\mathbf{I} \quad , \quad [\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}\sigma_* & 0 & 0\\ 0 & \sigma_* & 0\\ 0 & 0 & \sigma_*\end{bmatrix} \tag{2.72}$$

证明如下：设将主值 σ_* 代进(2.54)式中解出的主方向 $\hat{n}$，设 $\hat{n}=\hat{e}_1$。现在垂直于 $\hat{e}_1$ 的平面内任取两个相互垂直的单位矢量 $\hat{e}_2$ 和 $\hat{e}_3$，使之，$\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$、$\hat{e}_3$ 构成右手直角坐标系，应力张量 Σ 在此坐标系为 Σ^*

$$\Sigma^* = \sigma_{ij}^*\hat{e}_i\hat{e}_j$$

由于 $\hat{e}_1$ 为主方向，故有

$$\Sigma^* \cdot \hat{e}_1 = \sigma_{11}^*\hat{e}_1 + \sigma_{21}^*\hat{e}_2 + \sigma_{31}^*\hat{e}_3 \equiv \sigma_*\hat{e}_1$$

从而推出

$$\sigma_{21}^* = \sigma_{12}^* = 0 \quad , \quad \sigma_{31}^* = \sigma_{13}^* = 0 \quad , \quad \sigma_{11}^* = \sigma_* \tag{2.73}$$

由于：$\sigma_{(1)}=\sigma_{(2)}=\sigma_{(3)}=\sigma_*$，所以 σ_* 是特征方程(2.38)式的三重根，即有下式成立

$$\sigma^3 - \mathrm{I}_\Sigma\sigma^2 + \mathrm{II}_\Sigma\sigma - \mathrm{III}_\Sigma \equiv (\sigma - \sigma_*)^3$$

从而推出

$$\mathrm{I}_\Sigma = 3\sigma_* \quad , \quad \mathrm{II}_\Sigma = 3\sigma_*^2 \quad , \quad \mathrm{III}_\Sigma = \sigma_*^3$$

当然 I_Σ、II_Σ、III_Σ 亦是 Σ^* 的不变量，据(2.39)式，则推出

$$\begin{cases}\mathrm{I}_\Sigma = 3\sigma_* \equiv \sigma_* + \sigma_{22}^* + \sigma_{33}^*\\ \mathrm{II}_\Sigma = 3\sigma_*^2 \equiv 3\sigma_*^2 + (\sigma_{23}^*)^2\\ \mathrm{III}_\Sigma = \sigma_*^3 \equiv \sigma_*[\sigma_{22}^*\sigma_{33}^* - (\sigma_{23}^*)^2]\end{cases}$$

由如上三式则解出

$$\sigma_{23}^{*}=\sigma_{32}^{*}=0 \quad , \quad \sigma_{22}^{*}=\sigma_{33}^{*}=\sigma_{*} \tag{2.74}$$

即有

$$\Sigma^{*}\cdot\hat{e}_2\equiv\sigma_{*}\hat{e}_2 \quad , \quad \Sigma^{*}\cdot\hat{e}_3\equiv\sigma_{*}\hat{e}_3$$

从而说明$\hat{e}_2$和$\hat{e}_3$亦是主方向。Σ^{*}的矩阵表示为

$$[\sigma_{ij}^{*}]=\begin{bmatrix}\sigma_{*} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{*} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{*}\end{bmatrix} \tag{2.75}$$

以上证明了在垂直于$\hat{e}_1$的平面上任一方向都是主方向。同样可以证明，在垂直于$\hat{e}_2$或$\hat{e}_3$的平面上的任一方向也都是主方向，从而证明了在三个主应力相等的情况下应力张量总呈(2.72)形式，不管坐标系如何取。

通过以上分析看出，不管主应力值相等与否，在以主方向为坐标轴向的直角坐标系中，应力张量按矩阵表示总呈对角线形式，如(2.60)式所示。

在此还要指出，在介质中一点上的三个主应力当中，实质上包含了在该点处所有方向上的法向应力分量中的最大值和最小值，即在$\sigma_{(1)}$、$\sigma_{(2)}$、$\sigma_{(3)}$之中有一个是该点所有法向分量中的最大的；又有一个是所有法向分量中的最小的。这一事实则表明，可仿照下节的求极值(extreme value)的办法求主应力。

在主应力空间(principal stress space)，其坐标轴取主方向而坐标的测量单位为应力，如图2.13所示。根据(2.60)式和(2.35.1)式，在该坐标系中任一个应力矢量$t^{(\hat{n})}$的坐标分量为

$$\begin{cases}t_1^{(\hat{n})}=\sigma_{(1)}n_1\\ t_2^{(\hat{n})}=\sigma_{(2)}n_2\\ t_3^{(\hat{n})}=\sigma_{(3)}n_3\end{cases} \tag{2.76}$$

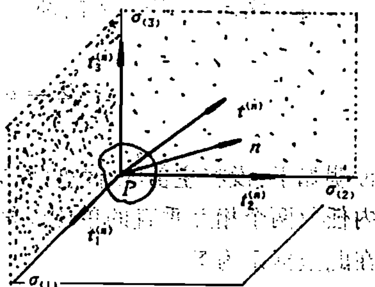


图2.13

由于$\hat{n}$为单位矢量

$$\hat{n}^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \tag{2.77}$$

将(2.76)代入上式则给出

$$\frac{(t_1^{(\hat{n})})^2}{(\sigma_{(2)})^2}+\frac{(t_2^{(\hat{n})})^2}{(\sigma_{(2)})^2}+\frac{(t_3^{(\hat{n})})^2}{(\sigma_{(3)})^2}=1 \tag{2.78}$$

这个方程为椭球面方程，该椭球称作拉梅应力椭球(Lame′ stress ellipsoid)。

§2.7 最大和最小剪应力

将作用在面 dS 上的应力矢量$\hat{t}^{(\hat{n})}$分解成垂直于该面的分量(法向应力分量)σ_N和平行该面的分量(切向应力分量即剪应力)σ_S，见图2.14，根据(2.31)式和(2.35.1)式则有

$$\sigma_S^2=t^{(\hat{n})}\cdot t^{(\hat{n})}-\sigma_N^2=t_i^{(\hat{n})}t_i^{(\hat{n})}-\sigma_N^2 \tag{2.79}$$

由于在主轴坐标系中研究问题(见图2.14)且假定主应力

$$\sigma_{(1)}=\sigma_{\mathrm{I}}>\sigma_{(2)}=\sigma_{\mathrm{II}}>\sigma_{(3)}=\sigma_{\mathrm{III}} \tag{2.80}$$

于是据(2.60)式，在该坐标系中应力张量Σ按矩阵表示法写成

$$[\sigma_{ij}]=\begin{bmatrix}\sigma_{\mathrm{I}} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{\mathrm{II}} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{\mathrm{III}}\end{bmatrix} \tag{2.81}$$

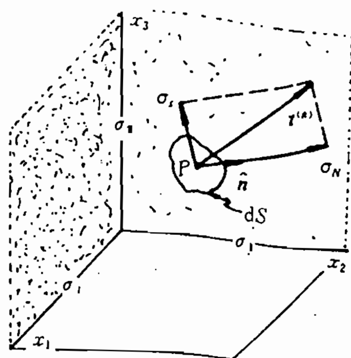


图 2.14

这样,任一应力矢量 $t^{(\hat{n})}$ 的分量则写成

$$t_1^{(\hat{n})}=\sigma_{\mathrm{I}}n_1 \quad , \quad t^{(\hat{n})}=\sigma_{\mathrm{II}}n_2 \quad , \quad t^{(\hat{n})}=\sigma_{\mathrm{III}}n_3 \tag{2.82}$$

法向应力 σ_N 则写成

$$\sigma_N=t^{(\hat{n})}\cdot\hat{n}=\sigma_{\mathrm{I}}n_1^2+\sigma_{\mathrm{II}}n_2^2+\sigma_{\mathrm{III}}n_3^2 \tag{2.83}$$

将(2.82)和(2.83)式代进(2.79)中,则给出 σ_S^2 作为方向余弦 n_i 的方程

$$\sigma_S^2=\sigma_{\mathrm{I}}^2n_1^2+\sigma_{\mathrm{II}}^2n_2^2+\sigma_{\mathrm{III}}^2n_3^2-(\sigma_{\mathrm{I}}n_1^2+\sigma_{\mathrm{II}}n_2^2+\sigma_{\mathrm{III}}n_3^2)^2 \tag{2.84}$$

利用拉格朗日乘子法(method of Lagrangian multipliers),可从上式求得 σ_S 的最大值和最小值,其做法是构造一个如下形式的函数 F:

$$F=\sigma_S^2-\lambda(n_in_i-1) \tag{2.85}$$

式中 λ 称作拉格朗日乘子(Lagrangian multiplier)。函数 F 当然仍是 n_i 的函数,因此 F 的极值则由 $\partial F/\partial n_i=0$ 给出。对 F 分别求 n_i 的偏导(partial derivative)并令其为零,即有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial n_1}=2\sigma_{\mathrm{I}}^2n_1-4\sigma_{\mathrm{I}}n_1(\sigma_{\mathrm{I}}n_1^2+\sigma_{\mathrm{II}}n_2^2+\sigma_{\mathrm{III}}n_3^2)-2n_1\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial n_2}=2\sigma_{\mathrm{II}}^2n_2-4\sigma_{\mathrm{II}}n_2(\sigma_{\mathrm{I}}n_1^2+\sigma_{\mathrm{II}}n_2^2+\sigma_{\mathrm{III}}n_3^2)-2n_2\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial n_3}=2\sigma_{\mathrm{III}}^2n_3-4\sigma_{\mathrm{III}}n_3(\sigma_{\mathrm{I}}n_1^2+\sigma_{\mathrm{II}}n_2^2+\sigma_{\mathrm{III}}n_3^2)-2n_3\lambda=0\end{cases} \tag{2.86}$$

将上式整理并与(2.77)式联立,则给出如下方程组

$$\begin{cases}n_1[\sigma_{\mathrm{I}}^2-2\sigma_{\mathrm{I}}(\sigma_{\mathrm{I}}n_1^2+\sigma_{\mathrm{II}}n_2^2+\sigma_{\mathrm{III}}n_3^2)+\lambda]=0\\ n_2[\sigma_{\mathrm{II}}^2-2\sigma_{\mathrm{II}}(\sigma_{\mathrm{I}}n_1^2+\sigma_{\mathrm{II}}n_2^2+\sigma_{\mathrm{III}}n_3^2)+\lambda]=0\\ n_3[\sigma_{\mathrm{III}}^2-2\sigma_{\mathrm{III}}(\sigma_{\mathrm{I}}n_1^2+\sigma_{\mathrm{II}}n_2^2+\sigma_{\mathrm{III}}n_3^2)+\lambda]=0\\ n_1^2+n_2^2+n_3^2=1\end{cases} \tag{2.87}$$

从如上方程组便可求剪应力 σ_S 的极值所对应的方向余弦 n_i 和 λ。其一组解为

$$n_1=\pm 1,\quad n_2=0,\quad n_3=0,\quad \lambda=\sigma_{\mathrm{I}}^2 \tag{2.88.1}$$

即单位矢量 $\hat{n}$ 平行 x_1 轴,即为主方向 $\hat{n}^{(1)}$.

$$n_1=0\quad ,n_2=\pm 1\quad ,n_3=0\quad ,\lambda=\sigma_{\mathrm{II}}^2 \tag{2.88.2}$$

即单位矢量 $\hat{n}$ 平行 x_2 轴,即为主方向 $\hat{n}^{(2)}$.

$$n_1=0\quad ,n_2=0\quad ,n_3=\pm 1\quad ,\lambda=\sigma_{\mathrm{III}}^2 \tag{2.88.3}$$

即单位矢量 $\hat{n}$ 平行 x_3 轴,即为主方向 $\hat{n}^{(3)}$.

将如上各式分别代进(2.84)中则给出

$$在垂直\ x_1\ 轴的平面上:\sigma_S=0 \tag{2.89.1}$$

$$在垂直\ x_2\ 轴的平面上:\sigma_S=0 \tag{2.89.2}$$

$$\text{在垂直 } x_3 \text{ 轴的平面上：} \sigma_S = 0 \tag{2.89.3}$$

式(2.89)所给出的各个面上的剪应力值，显然是最小剪应力值，即在主平面(与主方向垂直的平面)上剪应力为零，只有法向应力。

方程(2.87)给出的第二组解为

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad \lambda = -\sigma_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{III}} \tag{2.90.1}$$

$$n_2 = 0, \quad n_1 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad \lambda = -\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{III}} \tag{2.90.2}$$

$$n_3 = 0, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad \lambda = -\sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}} \tag{2.90.3}$$

将如上各式分别代进式(2.84)，则给出：

$$\sigma_S = \pm \frac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}) \tag{2.91.1}$$

它在过 x_1 轴而又平分 x_2 和 x_3 轴夹角的平面上，这样的平面有两个。

$$\sigma_S = \pm \frac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}}) \tag{2.91.2}$$

它在过 x_2 轴而又平分 x_1 和 x_3 轴夹角的平面上，这样的平面有两个。

$$\sigma_S = \pm \frac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}}) \tag{2.91.3}$$

它在过 x_3 轴而又平分 x_1 和 x_2 轴夹角的平面上，这样的平面有两个。

显然(2.91.2)式所示的剪应力：$\sigma_S = \pm \frac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})$是最大剪应力，设为 σ_A，该应力所作用的两平面之一为图 2.15(a)所示的 S_A 平面，σ_A 沿$\overline{OA}$线。

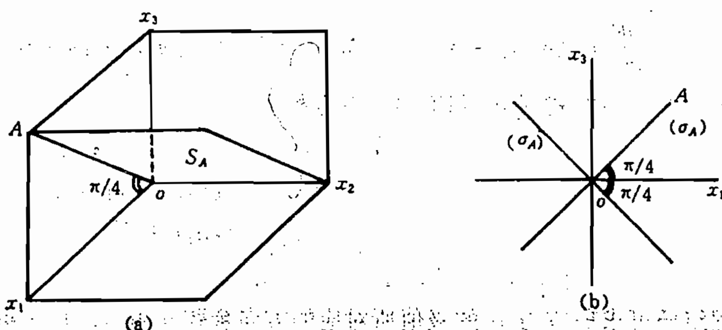


图 2.15

在此应该指出，在最大剪应力作用平面上，除了作用在该平面内的剪应力外，还有垂直该平面的法向应力 σ_N。按(2.83)式，$\sigma_N = \frac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{III}})$，除非 $\sigma_{\mathrm{I}} = -\sigma_{\mathrm{III}}$，否则总有法应力存在。与最大剪应力作用平面不同，在最大法应力的作用平面上只有法向应力，而无剪应力(即剪应力为零)，当然在所有的主平面上也只有法向应力而无剪应力，即主平面也是最小剪应力(剪应力为零)的作用平面。

2.8 应力莫尔圆

著名的莫尔应力圆(Mohr's stress circles)对在一点上的三维应力状态提供了方便的几何表示。为此，我们在 P 点还将坐标轴选在主应力方向，如图 2.16 所示。假定三个主应力各不相同并按如下次序排列，即

$$\sigma_{\mathrm{I}} > \sigma_{\mathrm{II}} > \sigma_{\mathrm{III}} \tag{2.92}$$

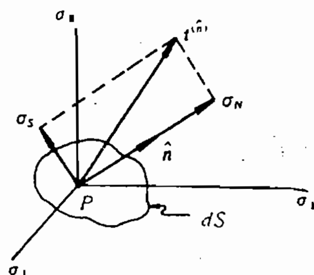


图 2.16

在此坐标系中应力矢量 $t^{(\hat{n})}$ 的法向分量 σ_N 和切向分量 σ_S 满足如下方程

$$\begin{cases}\sigma_N = \sigma_{\mathrm{I}} n_1^2 + \sigma_{\mathrm{II}} n_2^2 + \sigma_{\mathrm{III}} n_3^2 \\ \sigma_N^2 + \sigma_S^2 = \sigma_{\mathrm{I}}^2 n_1^2 + \sigma_{\mathrm{II}}^2 n_2^2 + \sigma_{\mathrm{III}}^2 n_3^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1\end{cases} \tag{2.93}$$

由此方程组可解出方向余弦 n_i 为

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{II}})(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{III}}) + \sigma_S^2}{(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}})} \tag{2.94.1}$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{I}}) + \sigma_S^2}{(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{I}})} \tag{2.94.2}$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{I}})(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{II}}) + \sigma_S^2}{(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})(\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{II}})} \tag{2.94.3}$$

在以 σ_N 作为横轴(abscissa)、以 σ_S 作为纵轴(ordinate)的应力平面(stress plane)上，可根据(2.94)式的诸方程作出莫尔应力圆，见图 2.17 所示。

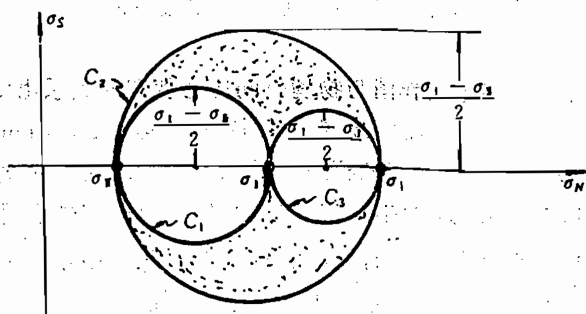


图 2.17

在(2.94.1)式中，因由(2.92)式推出 $\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}} > 0$ 和 $\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} > 0$，而 n_1^2 为非负量，因此该式右边的分子部分满足

$$(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{II}})(\sigma_N - \sigma_{\mathrm{III}}) + \sigma_S^2 \geqslant 0 \tag{2.95}$$

该式化成

$$\left[\sigma_N - \frac{\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{III}}}{2}\right]^2 + \sigma_S^2 \geqslant \left[\frac{\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}}}{2}\right]^2$$

因此，在 (σ_N, σ_S) 平面上表示一点处任一个应力矢量 $t^{(\hat{n})} = (\sigma_N, \sigma_S)$ 的点 (σ_N, σ_S)，均在如下方程描述的圆上或者圆外，该方程为

$$\left[\sigma_N - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}\right]^2 + \sigma_S^2 = \left[\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right]^2 \tag{2.96}$$

这个圆就是图 2.17 中的圆 C_1。

同样地，在(2.94.2)式中因 $\sigma_{II} - \sigma_{III} > 0, \sigma_{II} - \sigma_{I} < 0, n_2^2 \geqslant 0$，因此该式右边的分子部分满足

$$(\sigma_N - \sigma_{III})(\sigma_N - \sigma_{I}) + \sigma_S^2 \leqslant 0 \tag{2.97}$$

由此推出，在应力平面上表示应力矢量的点(σ_N, σ_S)应在如下方程所示的圆上或圆内，该方程为

$$\left[\sigma_N - \frac{\sigma_{III} + \sigma_{I}}{2}\right]^2 + \sigma_S^2 = \left[\frac{\sigma_{III} - \sigma_{I}}{2}\right]^2 \tag{2.98}$$

这个圆就是图 2.17 中的圆 C_2。

同样地，在(2.94.3)式中因 $\sigma_{III} - \sigma_{I} \leqslant 0, \sigma_{III} - \sigma_{II} < 0, n_3^2 \geqslant 0$，因此有

$$(\sigma_N - \sigma_{I})(\sigma_N - \sigma_{II}) + \sigma_S^2 \geqslant 0 \tag{2.99}$$

因此可推出，表示应力矢量的点应在下述圆上或圆外

$$\left[\sigma_N - \frac{\sigma_{I} + \sigma_{II}}{2}\right]^2 + \sigma_S^2 = \left[\frac{\sigma_{I} - \sigma_{II}}{2}\right]^2 \tag{2.100}$$

这个圆即图 2.17 中的圆 C_3。

由于在(σ_N, σ_S)平面上表示点 P 的任一应力矢量 $t^{(n)}$ 的点(σ_N, σ_S)都要满足方程(2.94)式，所以表示 P 点处所有应力矢量的点应在圆 C_2 之上或之内、而在圆 C_1 和 C_3 之上或之外，即在图 2.17 所示阴影区。从图上清楚地看出最大剪应力为$(\sigma_{I} - \sigma_{III})/2$，正如上一节的分析。

鉴于剪应力的正负号并不重要，所以在作莫尔圆图时，往往只画图 2.17 所示对称图形的上一半。

在应力平面上莫尔的应力作图与物理空间应力状态的关系由图 2.18 给出。该图只画出以 P 点为中心的连续介质球的八分之一，即第一象限(first octant)。在球面 ABC 上任一点 Q 处的法线 $\hat{n}$ 均可充当 P 点处相应面元 dS 的法线，由于应力张量的对称性以及在图 2.18 中的标轴均采用应力主轴，所以在球面 ABC 上的那些点可完全表示了 P 点的应力状态。对于所取的那个点 Q，它的位置由图示的弧线$\overset{\frown}{KD}$、$\overset{\frown}{GE}$、$\overset{\frown}{FH}$之交点来定位，沿$\overset{\frown}{KD}$线 n_1 为常数、沿$\overset{\frown}{GE}$线 n_2 为常数、沿$\overset{\frown}{FH}$线 n_3 为常数，即

$$\begin{cases} \text{在}\overset{\frown}{KD}\text{上} \quad n_1 = \cos\phi = \text{const} \\ \text{在}\overset{\frown}{GE}\text{上} \quad n_2 = \cos\beta = \text{const} \\ \text{在}\overset{\frown}{FH}\text{上} \quad n_3 = \cos\theta = \text{const} \end{cases} \tag{2.101}$$

而在边线的圆弧$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$和$\overset{\frown}{AB}$上各为

$$\begin{cases} \text{在}\overset{\frown}{BC}\text{上} \quad n_1 = \cos\pi/2 = 0 \\ \text{在}\overset{\frown}{CA}\text{上} \quad n_2 = \cos\pi/2 = 0 \\ \text{在}\overset{\frown}{AB}\text{上} \quad n_3 = \cos\pi/2 = 0 \end{cases} \tag{2.102}$$

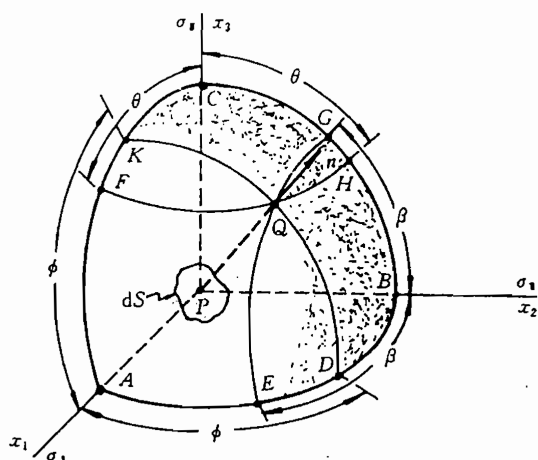


图 2.18

根据(2.102)的第一式和(2.94.1)式，在$\overset{\frown}{BC}$上任一点所对应的应力矢量之分量 σ_N 和 σ_S，将由图 2.17 中图 C_1 上的相应点给出，即$\overset{\frown}{BC}$对应着图 2.17 中的圆 C_1；同理，图 2.18 中$\overset{\frown}{CA}$对应着图 2.17 中的圆 C_2、$\overset{\frown}{AB}$对应着图 2.17 中的圆 C_3。

对于图 2.18 中以某一点 Q 来定位的 P 点处的应力矢量 $t^{(\hat{n})}$，其分量 σ_N 和 σ_S 可以通过作图办法来确定，见图 2.19，其作图的依据和做法如下述。

由于 P 点的应力状态是一定的，即给定了 σ_{I}、σ_{II}、σ_{III} 值，因此由 Q 点定位的面元 dS 上的应力矢量 $t^{(\hat{n})}$，完全由 Q 点上的单位法线 $\hat{n}$ 来决定。若在(σ_N,σ_S)平面上，一旦 $\hat{n}=(n_1,n_2,n_3)$指定，其 $t^{(\hat{n})}$ 的分量 σ_N 和 σ_S 就由(2.93)式完全确定了。据(2.94)式，$n_i=\mathrm{const}$ 是(σ_N,σ_S)平面上的圆弧线，这些圆弧线分别以图 2.19 中的圆 C_1、C_2、C_3 的圆心为圆心，例如 $n_2=\mathrm{const}$，则由(2.94)式的第二式推出如下方程：

$$\left[\sigma_N-\frac{\sigma_{\mathrm{III}}+\sigma_{\mathrm{I}}}{2}\right]^2+\sigma_S^2=\left[\frac{\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}}}{2}\right]^2+n_2(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{I}})$$

该方程代表以 C_2 圆的圆心为圆心的圆，所以由该方程所画出的曲线$\overset{\frown}{ge}$是条圆弧线。据 $n_i=\mathrm{const}$ 所作的圆弧线$\overset{\frown}{ge}$、$\overset{\frown}{hf}$、$\overset{\frown}{kd}$的交点 q 便是矢量 $t^{(\hat{n})}$ 在(σ_N,σ_A)平面的对应点。其实，只作两条弧线即可。

关于圆弧线与各圆的交点。以$\overset{\frown}{ge}$ 为例，在该线上 $n_2=\cos\beta=\mathrm{const}$，据(2.94.2)式，有

$$n_2^2=\cos^2\beta=\frac{(\sigma_N-\sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_N-\sigma_{\mathrm{I}})+\sigma_S^2}{(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{I}})}\tag{2.103}$$

而圆 C_1（即 $n_1=\cos\phi=0,\phi=\pi/2$）满足(2.96)式。在$\overset{\frown}{ge}$ 与 C_1 的交点 g 处则同时满足(2.103)和(2.96)式，从而推出

$$n_2^2=\cos^2\beta=\frac{(\sigma_N-\sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_N-\sigma_{\mathrm{I}})-(\sigma_N-\sigma_{\mathrm{II}})(\sigma_N-\sigma_{\mathrm{III}})}{(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}})(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{I}})}\tag{2.104}$$

而据(2.96)式，C_1 圆的半径 R_1、圆心坐标 N_1 为

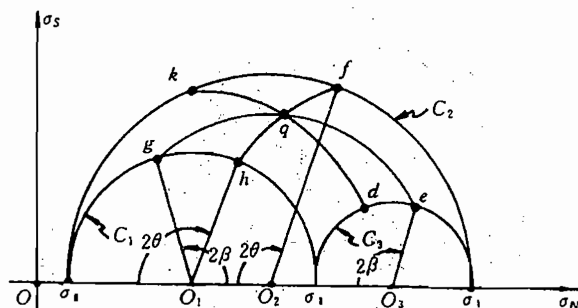


图 2.19

$$N_1 = \frac{\sigma_Ⅱ + \sigma_Ⅲ}{2} \quad , \quad R_1 = \frac{\sigma_Ⅱ - \sigma_Ⅲ}{2} \tag{2.105}$$

利用(2.105)式可将(2.104)式化成

$$\cos 2\beta = \sigma_N^{\bullet}/R_1 \quad , \quad \sigma_N^{\bullet} = \sigma_N - N_1 \tag{2.106}$$

$\sigma_N^{\bullet} = R_1\cos 2\beta$ 正是 g 点的横坐标 σ_N 与 N_1 之差，即$\overline{O_1g}$与 σ_N 轴的夹角为 2β，如图 2.19 所示。同理可证，$\overset{\frown}{ge}$ 与圆 C_3 的交点 e 同 O_3 的连线$\overline{O_3e}$，与 σ_N 轴的顺时针夹角为 2β。对于$\overset{\frown}{hf}$与 C_1 圆和 C_2 圆的交点情况、$\overset{\frown}{kd}$与 C_2 圆和 C_3 圆交点情况，同理可证，见图所示。

2.9 平面应力

如果有一个且唯一的一个主应力为零，这种应力状态称作平面应力(plane stress)。这种情况发生在物体元受载荷的自由面上。如果主应力仍按(2.92)式那样排列，则莫尔应力圆将为图 2.20 所描述的情况之一。

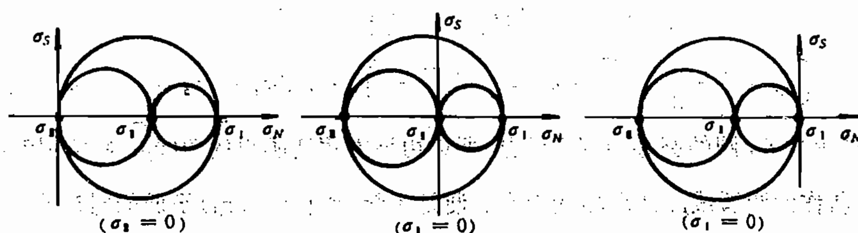


图 2.20

如果主应力不按次序排列，并将零主应力的方向取成 x_3 轴向，这样的应力状态叫作平行(x_1, x_2)平面的平面应力。在此情况下，对于任选的正交 x_1x_2 坐标系，其张量的矩阵形式为

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

这种平面应力的应力二次型曲面是底面在(x_1,x_2)平面内的圆柱面，其方程为

$$\sigma_{11}x_1^2 + 2\sigma_{12}x_1x_2 + \sigma_{22}x_2^2 = \pm k^2 \tag{2.108}$$

在一些材料力学(Mechanics of Materials or Strength of Materials)书中，对于平面应力常用一个莫尔圆表示，见图2.21。可是要表示一点的整个应力状态需要三个莫尔圆，所以用一个莫尔圆的表征是不完善的，尤其当所用的莫尔圆为图2.20中所示的内圆中的一个，则将给不出在该点的最大剪应力。然而，使用单一的莫尔圆却能表示P点过零主应力轴的那些平面上的应力点，在这样的平面上，若零主应力方向选作x_3轴向，则应力张量如式(2.107)所示，即应力张量Σ为

$$\Sigma = \sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j = \sigma_{11}\hat{e}_1\hat{e}_1 + \sigma_{12}\hat{e}_1\hat{e}_2 + \sigma_{12}\hat{e}_2\hat{e}_1 + \sigma_{22}\hat{e}_2\hat{e}_2 \tag{2.109}$$

该面的单位法线$\hat{n}$以及应力矢量$t^{(\hat{n})}$写成

$$\hat{n} = n_i\hat{e}_i = n_1\hat{e}_1 + n_2\hat{e}_2 \tag{2.110}$$

$$t^{(\hat{n})} = \Sigma \cdot \hat{n} = \sigma_{ij}n_j\hat{e}_i = (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2)\hat{e}_1 + (\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2)\hat{e}_2 \tag{2.111}$$

由于

$$\begin{cases} \sigma_N^2 + \sigma_S^2 = t^{(\hat{n})} \cdot t^{(\hat{n})} = (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2)^2 + \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2)^2 \\ \sigma_N = t^{(\hat{n})} \cdot \hat{n} = (\sigma_{11}n_1^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 + \sigma_{22}n_2^2 \\ n^2 = \hat{n} \cdot \hat{n} = n_1^2 + n_2^2 = 1 \end{cases} \tag{2.112}$$

从上式消去n_1和n_2，则得到

$$\left[\sigma_N - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right]^2 + \sigma_S^2 = \left[\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right]^2 + \sigma_{12}^2 \tag{2.113}$$

该圆作图如图2.21所示，其圆的圆心C点坐标σ_{NC}和半经R分别为

$$\sigma_{NC} = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 \quad ,R \quad = \sqrt{[(\sigma_{11} - \sigma_{22})/2]^2 + \sigma_{12}^2} \tag{2.114}$$

在图2.21的圆上A点的应力状态对应着该图上的长方体的右侧面上的应力矢量，B点对应着长方体的顶面上的应力矢量。从图上还可以看出，E、D两点是最大剪应力点，其值等于R；从图上还可找出主应力σ_{I}和σ_{I}

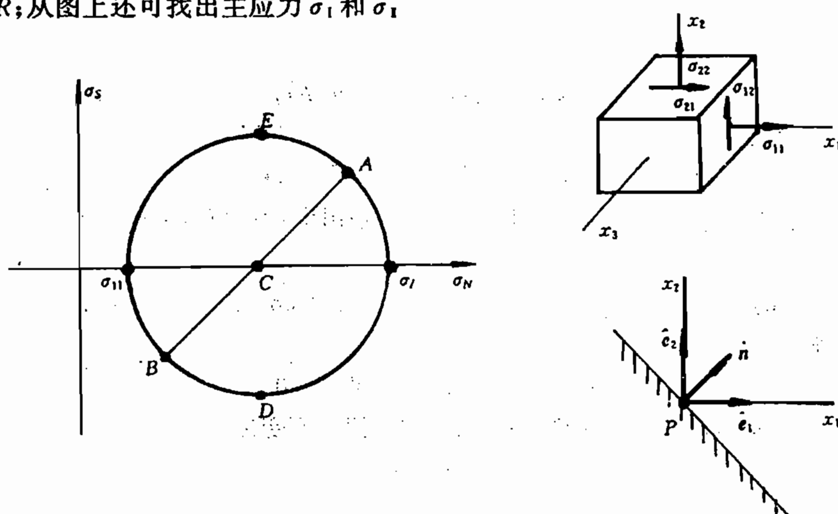


图2.21

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_{NC} + R = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \tag{2.115}$$

$$\sigma_{\mathrm{II}} = \sigma_{NC} - R = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \tag{2.116}$$

2.10 偏应力张量(应力偏量张量)

把应力张量Σ分成两部分是非常有用的，比如在研究流体和大变形的固体以及动载问题时。Σ分成

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j = \boldsymbol{\Sigma}_M + \boldsymbol{\Sigma}_D \tag{2.117}$$

其中$\boldsymbol{\Sigma}_M$为球形应力张量或称流体静力学应力张量(spherical or hydrostatic stress tensor)

$$\boldsymbol{\Sigma}_M = \sigma_m\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \tag{2.118}$$

式中σ_m为平均法应力(正应力)

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = -p \tag{2.119}$$

p称作流体静水压力，或称流体静压力(hydrostatic pressure)。

式(2.117)中$\boldsymbol{\Sigma}_D$为偏应力张量(deviator stress tensor)或称应力偏量张量(stress deviator tensor)

$$\boldsymbol{\Sigma}_D = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \tag{2.120}$$

式中

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3 = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \tag{2.121.1}$$

或写成

$$\boldsymbol{\Sigma}_D = S_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j = \boldsymbol{\Sigma} - \sigma_m\mathbf{I} = \boldsymbol{\Sigma} + p\mathbf{I} \tag{2.121.2}$$

偏应力张量$\boldsymbol{\Sigma}_D$的主方向与应力张量Σ的主方向相同，因此偏应力张量的主值$S_{(k)}$为

$$S_{(k)} = \sigma_{(k)} - \sigma_m \tag{2.122}$$

与应力张量的特征方程(characteristic equation)式(2.38)相当，偏应力张量的特征方程为三次多项式

$$S^3 - \mathrm{I}_D S^2 - \mathrm{II}_D S - \mathrm{III}_D = 0 \tag{2.123}$$

其中I_D、II_D、III_D分别称偏应力张量的第一、第二和第三不变量。

$$\mathrm{I}_D = S_{(1)} + S_{(2)} + S_{(3)} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = \mathrm{tr}\boldsymbol{\Sigma}_D = 0 \tag{2.124}$$

$$\mathrm{II}_D = \frac{1}{2}[S_{(1)}^2 + S_{(2)}^2 + S_{(3)}^2) = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}$$

$$
= -\begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{23} & S_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} S_{33} & S_{13} \\ S_{13} & S_{11} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{6}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)\right]
$$

$$
= \frac{1}{6}\left[(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})^2 + (\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})^2 + (\sigma_{(3)} - \sigma_{(1)})^2\right] \tag{2.125}
$$

$$
\mathrm{III}_D = S_{(1)}S_{(2)}S_{(3)} = \det\Sigma_D = |S_{ij}| = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix} \tag{2.126}
$$

本章主要参考文献[1]。

习题

2.1　在题 2.1 图所示的 P 点，应力矢量 $t^{(\hat{n})}$ 作用在面元 $\hat{n}\Delta S$ 上，$t^{(\hat{n}_\cdot)}$ 作用在面元 $\hat{n}_\cdot\Delta S_\cdot$ 上。证明 $t^{(\hat{n})}$ 在 $\hat{n}_\cdot$ 向的分量等于 $t^{(\hat{n}_\cdot)}$ 在 $\hat{n}$ 向的分量。

2.2　在点 P 的应力张量给出如下

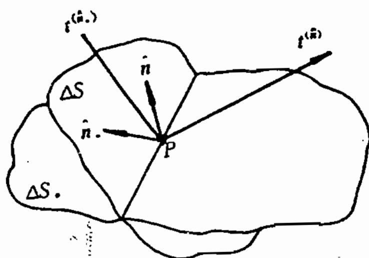
$$
\Sigma = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}
$$

请确定在 P 点其单位法线为 $\hat{n} = \frac{2}{3}\hat{e}_1 - \frac{2}{3}\hat{e}_2 + \frac{1}{3}\hat{e}_3$ 的面元上的应力矢量。

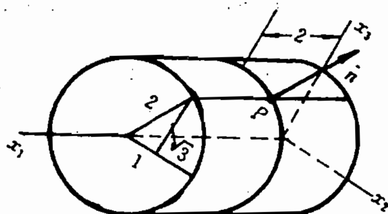
2.3　在一点的应力状态由如下应力张量给出

$$
\Sigma = \{\sigma_{ij}\} = \begin{bmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{bmatrix}
$$

其中 a、b、c 是常数，σ 是某个应力值。请确定使在八面体面(即单位法线 $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{e}_3$ 的平面)上的应力矢量为零时，常数 a、b、c 的值。



题 2.1



题 2.4

2.4　在笛卡尔坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中介质中应力状态由下式给出：

$$
\Sigma = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}
$$

试确定作用在与圆柱面相切平面 P 点处的应力矢量。P 点的坐标为$(2,1,\sqrt{3})$，见题 2.4 图。柱面的方

程为：$x_2^2+x_3^2=4$。

2.5　已知在其单位法线为 $\hat{n}=n_i\hat{e}_i$ 平面上应力法向分量为 $\sigma_N=\sigma_{ij}n_in_j$，由此出发导出应力张量之分量的变换规律。

2.6　已知应力张量在题 2.6 所示的不带撇坐标系中为

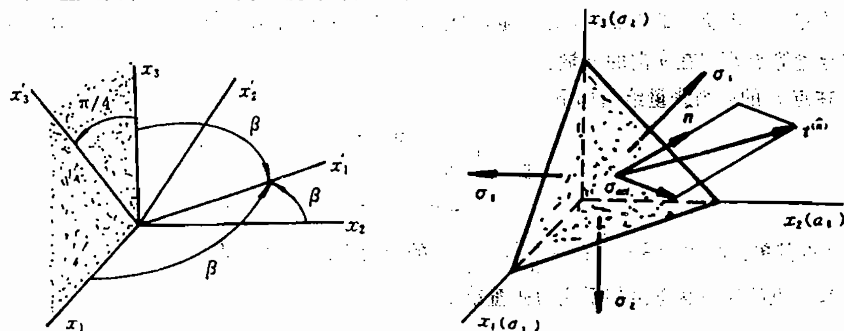
$$\Sigma=\sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j=\begin{pmatrix}\tau & 0 & 0\\ 0 & \tau & 0\\ 0 & 0 & \tau\end{pmatrix}$$

确定该应力张量在带撇坐标系中的形式。

2.7　已知在 P 点的应力张量在 $Ox_1x_2x_3$ 坐标系为

$$\Sigma=\sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_i=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

确定它的主值（主应力值）和主方向（主应力方向）。



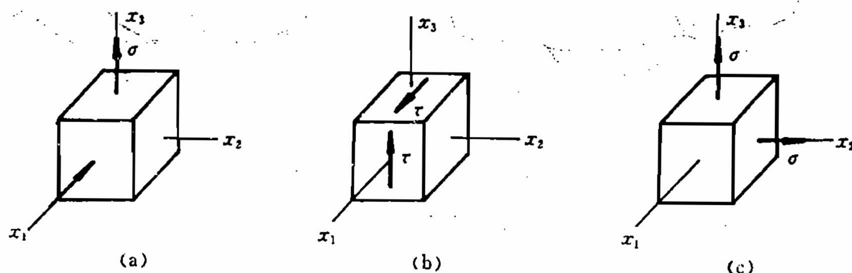
题 2.6　　　　题 2.8

2.8　在与三个主应力方向成等角的八面体平面(octahedral plane)上，如图所示。证明：在该平面上其剪应力为

$$\sigma_S=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_1)^2}$$

2.9　在 $Ox_1x_2x_3$ 坐标系下一点的应力状态由下式给出

$$\Sigma=\{\sigma_{ij}\}=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -6 & -12\\ 0 & -12 & 1\end{pmatrix}$$



题 2.10

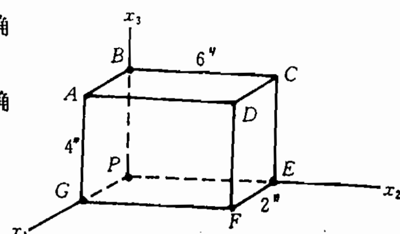
从分析上确定其单位法线为 $\hat{n}=\frac{2}{3}\hat{e}_1+\frac{1}{3}\hat{e}_2+\frac{2}{3}\hat{e}_3$ 的平面上的应力矢量的分量，并用莫尔圆图来检验分析的结果。

2.10 画出题 2.10 图所示的三种平面应力的莫尔图，并确定其最大剪应力。

2.11 在 P 点应力张量的主应力间满足 $2\sigma_{\mathrm{I}}=\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma_{\mathrm{I}}$。确定在其上 $\sigma_N=\sigma_{\mathrm{I}}$、$\sigma_S=\frac{\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{I}}}{2}$ 的平面的单位法线 $\hat{n}$。

2.12 在题 2.12 图的 P 点处的应力张量为

$$\Sigma=\begin{bmatrix}14 & 7 & -7\\ 7 & 21 & 0\\ -7 & 0 & 35\end{bmatrix}$$



题 2.12

确定该点在平行 BGE 面上的应力矢量、在平行 $BGFC$ 面上的应力矢量。

参考文献

[1] Mase G E. Theory and Problems of Continuum Mechanics. McGRAW-HILL BOOK COMPANY,1975

[2] 王仁．弹性力学讲义．北京：北京大学，1963

[3] 蒋咏秋等．塑性力学力基础．北京：机械工业出版社，1981

[4] 杨桂通．弹塑性力学．北京：人民教育出版社，1980

[5] 吕洪生，弹塑性流动的数值计算．长沙：国防科技大学，1977

[6] 王仁．黄文彬．塑性力学引论．北京：北京大学出版社，1983

第三章　连续介质运动学

3.1　物质坐标和空间坐标

连续介质力学的任务是研究物质(介质)在力的作用下的变形、运动和流动的。所谓变形(deformation)是指物质(物体)由于其各部分运动不一致而产生的形状的变化；而运动和流动(motion and flow)都是表述介质的瞬时或连续变化的术语，笼统讲二者没有区别，但流动一词在塑性(plasticity)研究中往往指运动产生了永久变形(permanent deformation)；而在研究流体流动(fluid flow)时流动的说法是指介质连续运动。总而言之，连续介质力学是研究物质运动的。

3.1.1　两种坐标

连续介质力学与一般的理论力学或刚体动力学(Theoretical Mechanics or Dynamics of Rigid Body)不同，它研究的不仅仅是物质(物体)的整体运动，而其重点是研究物质连续体的各个局部即各个质点的运动。然而组成一个连续体的质点有千千万万，那末如何区分各个质点以及不同时刻它们所处的空间位置呢？这就需要取两种坐标。

① 物质坐标

为了区分各个质点，必须给它们起个"名字"，即命名，这就需要选一个坐标系，以它们在运动开始时或某个时刻所处空间位置的坐标来记它们。这种标记各个质点的坐标就叫做**物质坐标**(material coordinates)，或称**拉格朗日坐标**(Lagrangian coordinates)。

当然物质坐标不一定就是介质质点初始时刻所在空间位置的坐标，亦可取成质量坐标或者其他相当形式，这要视方便而定。**但在本书中则将物质坐标指定为质点运动开始时的空间坐标**：$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3)$，除非特别指出。在这里，严格讲，$\boldsymbol{X}$ 是点的初始位置矢量，但为了方便使用，故称之"坐标"，对于如下的 $\boldsymbol{x}$ 亦同理。

② 空间坐标

运动的介质各质点，在不同时刻各处于不同的空间位置。为了标定这些空间位置则需要选取一个空间坐标系，质点在不同时刻所处位置的坐标：$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_2)$就称作**空间坐标**(spatial coordinates)，或称**欧拉坐标**(Eulerian coordinates)。

③ 物质坐标 X_i 与空间坐标 x_i 的关系

对于一个质点，在空间坐标系中，不同时刻 t 它处于不同的空间位置，即取不同的坐标 $\boldsymbol{x}$，亦即 $\boldsymbol{x}$ 是 t 的函数。这个函数即质点轨迹(path of particle)，即有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t) \tag{3.1.1}$$

或写成分量形式

$$x_i=x_i(t) \tag{3.1.2}$$

然而，质点不同，其轨迹亦不同。如果将如上函数纳入随质点而变化的因素，则按分量形式表示为

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(X, t) \tag{3.2.1}$$

或写成

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X_1, X_2, X_3, t) = \boldsymbol{x}(X, t) \tag{3.2.2}$$

在(3.2)中如 X 不变，它则代表以 X 为标记的那个质点的轨迹；如果令 t 不变它则描述了各个质点在该时刻所处的空间位置。

如果雅可比行列式不为零，即

$$J = |\partial x_i / \partial X_j| \neq 0 \tag{3.3}$$

则(3.2)式存在逆变式

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.4.1}$$

或写成

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(x_1, x_2, x_3, t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.4.2}$$

上式表明，在每个时刻连续介质所占据的空间的每个点上都有一个质点存在。

3.1.2 两种描述方法

描述连续介质运动有两种坐标，于是描述连续介质的物理量亦有两种方法。

① 拉格朗日方法

该方法是以质点作为观察对象(即随着介质中固定的质点来考察问题)，研究在给定的质点上各物理量随时间的变化；以及这些物理量从一个质点到另一个质点的变化。即把物理量 Ψ 看成 X 和 t 的函数

$$\Psi = F(X, t) = F(X_1, X_2, X_3, t) \tag{3.5}$$

这种描述方法亦称作拉格朗日描述(Lagrangian description)。

② 欧拉方法

该方法是在介质所占据的固定的空间点上来研究问题，研究在所给定的空间点上各物理量随时间的变化；以及这些物理量从一个空间点到另一个空间点的变化。即把物理量 Ψ 看成 $\boldsymbol{x}$ 和 t 的函数

$$\Psi = f(\boldsymbol{x}, t) = f(x_1, x_2, x_3, t) \tag{3.6}$$

这种描述方法亦称作欧拉描述(Eulerian description)。

3.2 空间导数、物质导数、随波导数

上一节给出了物理量的函数关系(functional relations)，本节研究物理量随时间的变化率(time rate of change)。(在直角坐标系中考虑)。

3.2.1 空间导数

空间导数(spatial derivative)又叫欧拉导数(Eulerian derivative)，它是在给定的空间点上函数对时间的变化率。如对 Ψ 函数的空间导数

$$\Psi = f(\boldsymbol{x}, t) = F(X, t) \quad , \quad X = X(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.7}$$

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} = \left.\frac{\partial f(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} = \left.\frac{\partial F(X, t)}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}}$$

$$= \left.\frac{\partial F(X, t)}{\partial t}\right|_{X} + \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{t} \cdot \left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}}$$

$$= \frac{\partial F(X,t)}{\partial t}\bigg|_X + \frac{\partial F}{\partial X_i}\bigg|_t \frac{\partial X_i}{\partial t}\bigg|_x \tag{3.8}$$

3.2.2 物质导数

物质导数亦叫随体导数(material derivative or substantial derivative),或称拉格朗日导数(Lagrangian derivative),它是跟随给定的质点上(即在给定质点上)函数对时间的变化率。对于(3.7)式的函数 Ψ,表为

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}\bigg|_X = \frac{\partial F(X,t)}{\partial t}\bigg|_X = \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\bigg|_X$$

$$= \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\bigg|_x + \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\bigg|_t \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\bigg|_X$$

$$= \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\bigg|_x + \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}\bigg|_t \frac{\partial x_i}{\partial t}\bigg|_X \tag{3.9}$$

据(3.2)式,在上式中

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\bigg|_X = \boldsymbol{v} = v_i\hat{e}_i \quad 或 \quad \frac{\partial x_i}{\partial t}\bigg|_X = v_i \tag{3.10}$$

$\boldsymbol{v}$ 为质点速度(velocity of particle),简称速度。

对于物质导数和空间导数均采用符号 $\partial/\partial t$,这在对被微商的函数已加上"下附标"时不会产生混淆。如 $\frac{\partial \Psi}{\partial t}\Big|_X$ 和 $\frac{\partial \Psi}{\partial t}\Big|_x$,前者为物质导数,后者为空间导数。为了区分没有加上下附标的物质导数与空间导数,一般对物质导数采用符号 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$,然而这样又易与真正的全导数混淆,所以本书有时改用符号 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$,或在被微函数字母头上加一点"·";而不加附标符号的 $\partial/\partial t$,只表示空间导数。于是(3.9)式改写成

$$\dot{\Psi} = \frac{\mathrm{D}\Psi}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}F(X,t)}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial F(X,t)}{\partial t}\bigg|_X = \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\bigg|_X = \frac{\mathrm{D}f(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{D}t}$$

$$= \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}$$

$$= \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_k} \tag{3.11.1}$$

或写成

$$\dot{\Psi} = \frac{\mathrm{D}\Psi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{x}}$$

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial t} + v_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \tag{3.11.2}$$

由此可引出一个物质导数算子(material derivative operator)

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \tag{3.12}$$

其中

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_i$$

按照新的符号,式(3.10)则表成

$$\frac{\mathrm{D}x_i}{\mathrm{D}t} = v_i \quad 或 \quad \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{v} \tag{3.13}$$

如果引进质点位移(displacement),位移 $\tilde{u}$ 定义作

$$\tilde{u} = x - X \qquad 或 \qquad \tilde{u}_i = x_i - X_i \tag{3.14}$$

其中 $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(X, t)$。于是(3.13)式可写成

$$v_i = \frac{Dx_i}{Dt} = \frac{D\tilde{u}_i}{Dt} \qquad 或 \qquad v = \frac{Dx}{Dt} = \frac{D\tilde{u}}{Dt} \tag{3.15}$$

如果 $\tilde{u}_i$ 作为 x_i 和 t 的函数,即 $\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(x, t)$,则上式写成

$$v_i(x, t) = \dot{\tilde{u}}_i(x, t) = \frac{D\tilde{u}_i}{Dt} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \tag{3.16.1}$$

或写成

$$v(x, t) = \dot{\tilde{u}}(x, t) = \frac{D\tilde{u}}{Dt} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\tilde{u} \tag{3.16.2}$$

作为 x 和 t 函数的速度

$$v_i = v_i(x, t) = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$$

或

$$v = v(x, t) = v(x_1, x_2, x_3, t)$$

称作瞬时速度场(instantaneous velocity field)。

速度的物质导数为加速度(acceleration)a,它作为拉格朗日函数形式为

$$a = a(X, t) = \dot{v} = \frac{Dv}{Dt} = \frac{Dv(X, t)}{Dt} = \left.\frac{\partial v(X, t)}{\partial t}\right|_X \tag{3.17.1}$$

或写成分量形式

$$a_i = a_i(X, t) = \dot{v}_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{Dv_i(X, t)}{Dt} = \left.\frac{\partial v_i(X, t)}{\partial t}\right|_X \tag{3.17.2}$$

作为欧拉函数形式为

$$a = a(x, t) = \dot{v} = \frac{Dv}{Dt} = \frac{Dv(x, t)}{Dt} = \left.\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}\right|_X$$
$$= \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + (v(x, t) \cdot \nabla)v(x, t) \tag{3.18.1}$$

或写成分量形式

$$a_i = a_i(x, t) = \dot{v}_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{Dv_i(x, t)}{Dt} = \left.\frac{\partial v_i(x, t)}{\partial t}\right|_X$$
$$= \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial t} + v_k(x, t)\frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_k} \tag{3.18.2}$$

3.2.3 随波导数

随波导数(wave derivative or derivative along with wave),它是定义在波阵面上的物理量随时间的变化率。

波的传播如果在拉格朗日空间(Lagrangian space)中描述,即在物质坐标系下描述,波的传播轨迹表成

$$X = \Phi(t) \qquad 或 \qquad X_i = \Phi_i(t) \tag{3.19}$$

物质波速(material velocity of wave)为

$$C = \left(\frac{dX}{dt}\right)_w = \frac{d\Phi(t)}{dt} \qquad 或 \qquad C_i = \left(\frac{dX_i}{dt}\right)_w = \frac{d\Phi_i(t)}{dt} \tag{3.20}$$

若在该空间中有一个定义在波阵面上的物理量Ψ,它表成

$$\Psi = F(X,t) \quad , \quad X = \Phi(t) \tag{3.21}$$

则 Ψ 的随波导数$(\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t)_w$ 表成

$$\begin{aligned}(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t})_w &= \frac{\partial F(X,t)}{\partial t}\bigg|_X + C\cdot\frac{\partial F(X,t)}{\partial X}\bigg|_t \\ &= \frac{\partial F(X,t)}{\partial t}\bigg|_X + C_k\frac{\partial F(X,t)}{\partial X_k}\bigg|_t\end{aligned} \tag{3.22}$$

如果波的传播在欧拉空间(Eulerian space)中描述,即在空间坐标系下描述,波的传播轨迹表成

$$\boldsymbol{x} = \varphi(t) \qquad 或 \qquad x_i = \varphi_i(t) \tag{3.23}$$

空间波速(Spatial velocity of wave)为

$$c = (\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t})_w = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} \qquad 或 \qquad c_i = (\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t})_w = \frac{\mathrm{d}\varphi_i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.24}$$

在此空间的波阵面上的物理量 Ψ 表成

$$\Psi = f(\boldsymbol{x},t) \quad , \quad \boldsymbol{X} = \varphi(t) \tag{3.25}$$

则 Ψ 的随波导数表成

$$\begin{aligned}(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t})_w &= \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\bigg|_x + \boldsymbol{c}\cdot\frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\bigg|_t \\ &= \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\bigg|_x + c_i\frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}\bigg|_t\end{aligned} \tag{3.26}$$

3.3 迹线和流线

3.3.1 迹线

所谓迹线(path line),它是一个质点在运动期间所走过的路线。质点不同,它的轨迹曲线亦不同。

在拉格朗日方法中,通过描述各个不同质点的运动路径来描述整个介质的运动。数学上质点的运动规律,由(3.2)式给出

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X,t) = \boldsymbol{x}(X_1,X_2,X_3,t) \tag{3.27}$$

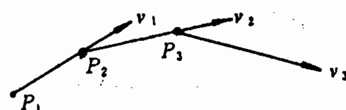


图 3.1

上式中 $\boldsymbol{r}$ 为矢经,X 不同则质点不同,将上式写成分量形式

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\boldsymbol{X},t) = x_1(X_1,X_2,X_3,t) \\ x_2 = x_2(\boldsymbol{X},t) = x_2(X_1,X_2,X_3,t) \\ x_3 = x_3(\boldsymbol{X},t) = x_3(X_1,X_2,X_3,t) \end{cases} \tag{3.28}$$

消去上式中时间 t 后则给出两个曲面方程

$$f_1(x_1,x_2,x_3,\boldsymbol{X}) = 0 \qquad 和 \qquad f_2(x_1,x_2,x_3,\boldsymbol{X}) = 0 \tag{3.29}$$

这两个曲面的交线便是质点 X 的迹线。

如果质点运动是按欧拉描述,给出速度场为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{v}(x_1,x_2,x_3,t) \tag{3.30}$$

根据质点轨迹与质点速度的关系式(3.10)或(3.13)，则有

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}{\mathrm{D}t} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \tag{3.31}$$

现求质点 $\boldsymbol{X}$ 的轨迹 $\boldsymbol{x}$. 在上式中 $\boldsymbol{x}$ 为函数,t 为自变量,$\boldsymbol{X}$ 为参数。在作为 $\boldsymbol{x}$ 与 t 的关系式中 $\boldsymbol{X}$ 又不显式地出现,故仍按习惯将 $\mathrm{D}\boldsymbol{x}/\mathrm{D}t$ 写成 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$,上式按分量形式为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = v_1(\boldsymbol{x},t) = v_1(x_1,x_2,x_3,t) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = v_2(\boldsymbol{x},t) = v_2(x_1,x_2,x_3,t) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = v_3(\boldsymbol{x},t) = v_3(x_1,x_2,x_3,t) \end{cases} \tag{3.32}$$

上式可以改写成

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{v_1(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{v_2(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{\mathrm{d}x_3}{v_3(x_1,x_2,x_3,t)} = \mathrm{d}t \tag{3.33}$$

将(3.32)或(3.33)式积分,则求得质点轨迹,如(3.29)式。

如上是通过分析来求质点轨迹。然而,在给出速度场(3.30)式后亦可通过作图来求质点轨迹,作法如图 3.1 所示。设 $t=t_1$ 时介质质点位于 P_1 点、速度为 $\boldsymbol{v}_1$;经过 Δt 时间质点沿 $\boldsymbol{v}_1$ 方向移动到 P_2 点,在 P_2 点上的速度为 $\boldsymbol{v}_2$;再过 Δt 时间质点沿 $\boldsymbol{v}_2$ 方向移动到 P_3 点;以此类推,便得一条折线 $P_1P_2P_3$……这条线便是该质点的近似轨迹。如果令 $\Delta t\to 0$,折线 $P_1P_2P_3$……则趋于质点的真正轨迹。

从如上的分析和作图可以清楚地看出,轨迹的概念是和拉格朗日观点相联系的。

3.3.2　**流线**

所谓流线(stream line),它是在任一固定时刻流场中这样的一条曲线:该线上的每一点的切线方向都是处于该空间点上的那个质点速度的方向。显然,时间不同,流线亦不同。

流线的概念是与欧拉观点相联系。如果在欧拉空间中给出速度场(3.30)式,则可写出流线方程

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \tag{3.34}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为流线弧元素(arc element of stream line)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x_i\boldsymbol{e}_i \tag{3.35}$$

由式(3.34)和(3.35)可以推出如下形式方程

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{v_1(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{v_2(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{\mathrm{d}x_3}{v_3(x_1,x_2,x_3,t)} \tag{3.36}$$

在上式中 t 为参量。上式实际是两个微分方程(differential equation),可将 x_1,x_2,x_3 之中任何一个作为自变量(independent variable),解出如下两个曲面方程:

$$g_1(x_1,x_2,x_3,t) = 0 \qquad 和 \qquad g_2(x_1,x_2,x_3,t) = 0 \tag{3.37}$$

这两个曲面的交线便是 t 时刻的一条流线。

流线亦可按迹线那样,采用几何作图的方法给出。考虑某一固定时刻 t,在流场中取一点 P_1,作 P_1 点的速度矢量线 $\boldsymbol{v}_1$;在 $\boldsymbol{v}_1$ 线上取一个与 P_1 点邻近的点 P_2,作 P_2 点上速度矢

量线 v_2；在 v_2 线上取一个与 P_2 点邻近的点 P_3；如此继续下去便得到一条折线 $P_1P_2P_3\cdots$，这条线就是一条近似的流线，见图 3.2。如果令折线节点间的距离(即步长)趋于零便得到一条真正的流线。

在给出每一时刻的流线后，其各个空间点上速度的方向由流线的切线给出，速度的大小可由流线的疏密度给出，流线密度大的地方速度大，流线稀的地方速度小，这从不可流体的定常流动可以清楚看出。

3.3.3 流线和迹线的区别

迹线和流线是两个具有不同内容和意义的曲线。迹线是同一质点在不同时刻所"走过"的路线，它与拉格朗日观点相联系；而流线则是同一时刻不同质点组成的曲线，它是与欧拉观点相联系的。因此这两种曲线内容是不同的。在不定常流动(unsteady flow)时，流线与迹线一般是不重合的，这从几何作图可以清楚地看出。

设在欧拉空间给出速度场

$$v = v(x,t) = v(P,t)$$

其中 x 是 P 点的坐标或位置矢量。根据质点和轨迹的关系 $x=x(X,t)$ 则给出在拉格朗日空间描述的速度 v^*

$$v = v(x(X,t),t) = v^*(X,t) = v^*$$

现考虑在 $t=t_0$ 时刻，流到 P_0 点那个质点的轨迹，以及在 $t=t_0$ 时刻过 P_0 点的流线，见图 3.2 所示。P_0 点的坐标 X_0 或说位置矢量为

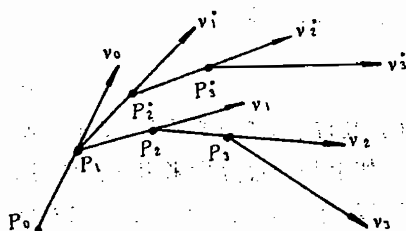


图 3.2

$$X_0 = x_0 = x(X_0,t_0)$$

现以点 P_0 或 X_0 来标志现所考虑的质点，该质点的速度 v^*

$$v^* = v^*(X_0,t) = v^*(P_0,t)$$

在 $t = t_0$ 时：
$$v(P_0,t_0) = v^*(P_0,t_0) = v_0$$

在图 3.2 中的各个量分别为

$$v_1 = v(P_1,t_0) \quad ,v_2 = v(P_2,t_0) \quad ,v_3 = v(P_3,t_0),$$

$$\begin{cases} v_1^* = v^*(P_0,t_0+\Delta t) \\ v_2^* = v^*(P_0,t_0+2\Delta t) \qquad ,(\Delta t \text{ 是个小量}) \\ v_3^* = v^*(P_0,t_0+3\Delta t) \end{cases}$$

$$\overline{P_0P_1} = v_0 \cdot \Delta t \quad , \quad \overline{P_1p_2^*} = v_1^* \cdot \Delta t \quad , \quad \overline{p_2^*p_3^*} = v_2^* \cdot \Delta t$$

折线 $P_0P_1P_2P_3\cdots$是 $t=t_0$ 时刻的一条流线；而折线 $P_0P_1P_2^*P_3^*\cdots$为质点 P_0 的轨迹。显然，流线与迹线不同，不重合。

但是，如果运动是定常的(steady)，流线和迹线是重合的。这从迹线的微分方程(3.33)和流线的微分方程(3.36)可以清楚地看出，因这时在欧拉空间的速度场 $v=v(x_1,x_2,x_3)$不显含 t，于是(3.33)式与(3.36)式成为形式完全相同的微分方程。

3.3.4 例题：求流线和迹线

设在欧拉空间给出了质点流动的二维速度场

$$v_1 = x_1 + t \quad , \quad v_2 = -x_2 + t \quad , \quad v_3 = 0$$

求 $t=0$ 时过 $P_0(-1,-1)$ 点的流线和迹线。

据(3.36)式,流线的微分方程表成

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1 + t} = \frac{\mathrm{d}x_2}{-x_2 + t}$$

在上式中 t 为参数。积分后给出

$$(x_1 + t)(-x_2 + t) = C = \text{const}$$

已知 $t=0$ 时 $x_1=x_2=-1$,将这个结果果代入上式推得 $C=-1$,于是得到在 $t=0$ 时,过 P_0 点的流线方程为

$$x_1 x_2 = 1 \tag{3.38}$$

据(3.33)式,迹线的微分方程表成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1 + t \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_2 + t \end{cases}$$

这两个非齐次常系数微分方程(non-homogeneous differential equation with constant coefficients)的解为

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^t - t - 1 \\ x_2 = C_2 e^{-t} + t - 1 \end{cases}$$

将 $t=0$ 时 $x_1=x_2=-1$ 的条件代进上式推得 $C_1=C_2=0$,于是得到过 P_0 点的迹线方程为

$$x_1 + x_2 = -2 \tag{3.39}$$

由(3.39)式和(3.38)式看出,尽管流线和迹线都过 P_0 点,可是这两条线并不重合,一条为双曲线(hyperbolic curve),另一条为直线(straight line)。

如果质点运动是定常的,设流场为

$$v_1 = x_1 \quad , \quad v_2 = -x_2 \quad , \quad v_3 = 0 \tag{3.40}$$

据(3.33)式,迹线方程写成

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1 \quad , \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_2$$

由上式消去 t 后得到

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} = -\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}$$

将上式积分,并考虑到 $t=0$ 时过 P_0 点的条件,便得到

$$xy = 1 \tag{3.41}$$

据(3.36)式,流线方程写成

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{-x_2}$$

将上式积分,并考虑到 $t=0$ 时刻过 P_0 点的条件,则得到

$$xy = 1 \tag{3.42}$$

从(3.41)和(3.42)式看出,流线和迹线相同,即流线和迹线重合。由于(3.40)式给出

的流场定常，所以在推导并定解(3.41)和(3.42)式时，其实与 t 无关，因此(3.41)和(3.42)式在任何时刻都成立，从而表明：在定常情况下，流线和迹线没有区别。

3.4 速度分解定理

从理论力学可知，任何一个刚体(rigid body)的运动都可分解成平动和转动(translation and rotation)之和。对于刚体某一点 P(见图3.3)的速度可表成

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad , \quad \boldsymbol{r} = x_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{3.43}$$

其中 $\boldsymbol{v}_0$ 是刚体 B 中 O 点的速度，$\boldsymbol{r}$ 是从 O 点到 P 的矢经，$\boldsymbol{\omega}$ 刚体绕 O 点旋转的瞬时角速度(instantaneous angular velocity)或称旋度矢量(vorticity vector)，对(3.43)式取旋度，则给出

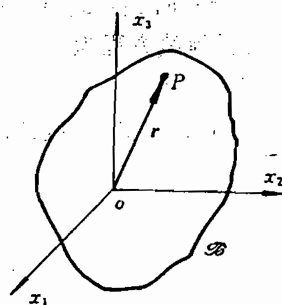


图 3.3

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega} = \omega_i \hat{\boldsymbol{e}}_i = \dfrac{1}{2} \nabla \times \boldsymbol{v} = \dfrac{1}{2} \mathrm{rot} \boldsymbol{v} \\ \nabla = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \hat{\boldsymbol{e}}_i \end{cases} \tag{3.44}$$

于是式(3.43)的第一式可以写成

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2} \mathrm{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r} \tag{3.45}$$

上式便就刚体的速度分解定理(velocity decomposing theorem for rigid body)。

现考虑非刚体的连续介质(弹塑性体以及可压流体等)。P_0 是连续介中的一点，坐标为(x_1, x_2, x_3)，该质点的速度为 $\boldsymbol{v}_0$，P 为 P_0 附近一点，见图 3.4，P 点的坐标为$(x_1+\mathrm{d}x_1, x_2+\mathrm{d}x_2, x_3+\mathrm{d}x_3)$，该质点的速度 $\boldsymbol{v}$

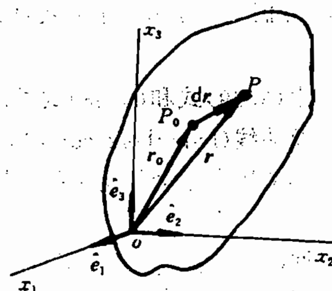


图 3.4

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}(x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, x_3 + \mathrm{d}x_3) \\ &= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{3.46.1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \mathrm{d}x_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \\ &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \end{aligned} \tag{3.46.2}$$

将 $\boldsymbol{v}$ 在 P_0 点展成泰勒级数(Taylor series)并取一级项，则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_2} \mathrm{d}x_2 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_3} \mathrm{d}x_3 \\ &= \boldsymbol{v}_0 + \mathbf{Y} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{3.46.3}$$

上式的分量形式为(在直角坐标系中)

$$v_i = (v_0)_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j = (v_0)_i + Y_{ij} \mathrm{d}x_j \tag{3.46.4}$$

其中

$$Y_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{3.47.1}$$

在上式中 Y_{ij} 为速度梯度张量(velocity gradient tensor)$\mathbf{Y}$ 的分量。将 $\mathbf{Y}$ 作和分解

$$\mathbf{Y} = Y_{ij} \hat{\boldsymbol{e}}_i \hat{\boldsymbol{e}}_j = \mathbf{Z} + \mathbf{B} = Z_{ij} \hat{\boldsymbol{e}}_i \hat{\boldsymbol{e}}_j + B_{ij} \hat{\boldsymbol{e}}_i \hat{\boldsymbol{e}}_j \tag{3.47.2}$$

其中 $\mathbf{B}=B_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$ 是变形速度张量(rate of deformation tensor),亦称应变率张量或速度应变张量(rate of strain tensor or velocity strain tensor),它定义作

$$B_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \tag{3.48}$$

或者写成

$$\mathbf{B}=B_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_3}) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

从 **B** 的定义清楚地看出,**B** 是对称的,即

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_c \quad \text{或} \quad B_{ij}=B_{ji} \tag{3.50}$$

式(3.47.2)中的 $\mathbf{Z}=Z_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$ 是旋度张量或旋转张量(vorticity tensor or spin tensor),它定义作

$$Z_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \tag{3.51}$$

或者写成

$$\mathbf{Z}=Z_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_3}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

从 **Z** 的定义清楚地看出,**Z** 是反对称的,即

$$\mathbf{Z}=-\mathbf{Z}_c \quad \text{或} \quad Z_{ij}=-Z_{ji} \tag{3.53}$$

据(3.47)式,(3.46)式可以写成

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\mathbf{Z}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{3.54}$$

而据(3.44)式和(3.52)式,则有

$$\omega_1=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3})=-Z_{23}=Z_{32} \tag{3.55.1}$$

$$\omega_2=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1})=Z_{13}=-Z_{31} \tag{3.55.2}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = -Z_{12} = Z_{21} \tag{3.55.3}$$

从而得出

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathbf{Z} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{3.56}$$

于是(3.54)式可以表成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{rot}\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{3.57}$$

这就是**亥姆霍兹速度分解定理**(Helmholtz velocity decomposing theorem)。将上式与(3.43)或(3.45)式比较看出,非刚体的连续介质的速度分解比刚体的多了一项,这一项是由于变形所引起的。即对于连续介质的质点运动的速度可以分解成:平动、旋转和变形三部分的速度之和。在此还应指出,与刚体不同,非刚体中的一点(P)相对另一点(P_0)的速度分解式(3.57)成立的条件是两点无限靠近($\mathrm{d}r \approx 0$),而对刚体的速度分解式(3.45)没有这种限制。

3.5 变形速度张量的物理解释与它在曲线坐标系中的表达式

上节指出,对于非刚性的介质,在速度分解时多了由变形所引起的项 $\mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$(粗略讲,理应如此)。然而 $\mathbf{B}$ 亦即各分量 B_{ij} 的确切物理意义是什么?本节将予以具体解释。

在图 3.4 中给出了同一时刻两个非常靠近的质点 P_0 和 P,两个质点的间距矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为(见(3.46.2)式)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \tag{3.58}$$

对上式两边同取随体导数,则有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \mathrm{d}\boldsymbol{v} \tag{3.59}$$

其中 $\qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) \quad , \quad \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0, t)$

从上式看出:$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$与 d 可以交换,即有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}) = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{r}}{\mathrm{D}t}\right) = \mathrm{d}\boldsymbol{v} \tag{3.60}$$

由此可见,物质线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的随体导数等于同一时刻两个无限邻近质点的速度之差 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$.

3.5.1 在直角坐标系中的解释

据(3.46.3)式和(3.59)式,则有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \tag{3.61}$$

现以上式为依据来阐明 B_{ij}的物理意义。在 t 时刻在图 3.5 所示的直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中的 P_0 点,取三个由质点所组成的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$、$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$、$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3$。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 = (\mathrm{d}x_1, 0, 0) = \mathrm{d}x_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 \tag{3.62.1}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 = (0, \mathrm{d}x_2, 0) = \mathrm{d}x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 \tag{3.62.2}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 = (0, 0, \mathrm{d}x_3) = \mathrm{d}x_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{3.62.3}$$

将(3.62.1)式代进(3.61)式中，则给出

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1)=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\hat{\boldsymbol{e}}_1+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\hat{\boldsymbol{e}}_2+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{3.63}$$

将上两边同时点乘以 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$，则给出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1)=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\mathrm{d}x_1)^2$$

而

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1)=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1)\equiv\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x_1)^2=\mathrm{d}x_1\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x_1)$$

于是由以上两式并考虑到(3.48)式则给出

$$B_{11}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=\frac{1}{\mathrm{d}x_1}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x_1) \tag{3.64.1}$$

同理可以推出

$$B_{22}=\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=\frac{1}{\mathrm{d}x_2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x_2) \tag{3.64.2}$$

$$B_{33}=\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=\frac{1}{\mathrm{d}x_3}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x_3) \tag{3.64.3}$$

由此可见，B_{11}、B_{22}、B_{33}分别是沿 x_1、x_2、x_3 轴向线元 $\mathrm{d}x_1$、$\mathrm{d}x_2$、$\mathrm{d}x_3$ 的相对拉伸速度或相对压缩速度(rate of relative extension or rate of relative compression)。

将(3.36.2)代进式(3.61)中给出

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2)=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2=\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\hat{\boldsymbol{e}}_1+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{3.65}$$

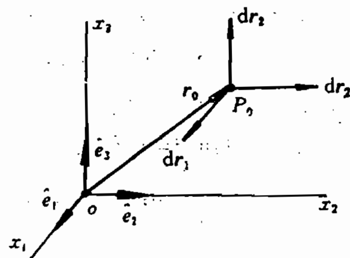


图 3.5

将上式两边点乘以 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$，将(3.63)式两边点乘以 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$，则给出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2)=\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1)=\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

将如上两式相加给出

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2&=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2)+\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1)\\&=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2)=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cos\theta_{12})\\&=\cos\theta_{12}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2)-\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\sin\theta_{12}\frac{\mathrm{D}\theta_{12}}{\mathrm{D}t}\end{aligned} \tag{3.66}$$

由于在变形开始时，即在 $t=t$ 时刻，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$ 垂直，见式(3.62)和图 3.5，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$ 的"初始"夹角$\theta_{12}=\pi/2$，亦即

$$\cos\theta_{12}=0\quad,\quad\sin\theta_{12}=1$$

于是由(3.66)式并考虑到(3.48)式则推出在 $t=t$ 时刻

$$B_{12}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1})=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}\theta_{12}}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{2}\dot{\theta}_{12} \tag{3.67.1}$$

同理可证

$$B_{23}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2})=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}\theta_{23}}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{2}\dot{\theta}_{23} \tag{3.67.2}$$

$$B_{13}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1})=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}\theta_{13}}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{2}\dot{\theta}_{13} \tag{3.67.3}$$

其中θ_{23}和θ_{13}分别为线元$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$和$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3$、$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$和$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3$之间的动态(即瞬时)夹角。由(3.67)的诸式看出$B_{12}=B_{21}$、$B_{23}=B_{32}$、$B_{13}=B_{23}$的物理意义分别为x_1轴与x_2轴、x_2轴与x_3轴、x_1轴与x_3轴向线元之间夹角减小速度(剪切速度)的一半。

变形速度张量的各分量除了以上的物理意义外,它的主对角线分量之和等于速度的散度,这由(3.48)或(3.49)式可以看出

$$B_{11}+B_{22}+B_{33}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=\mathrm{div}\boldsymbol{v} \tag{3.68}$$

3.5.2 在曲线坐标系中B_{ij}的表达式

根据$\mathbf{B}$各分量B_{ij}的物理意义,可以给出它们在曲线坐标系中的表达形式。

现在如上所考虑的P_0取一个正交曲线坐标$P_0q_1q_2q_3$,如图3.6所示,其中$\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$、$\hat{e}_3$为沿曲线坐标的单位矢量。在该坐标系中

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(q_1,q_2,q_3)=v_i\hat{e}_i$$

设P为靠近P_0的另一质点,当然亦有与(3.59)式的同样关系式

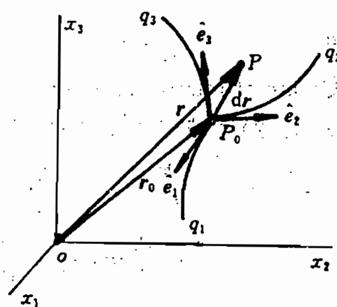


图3.6

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0=\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$
$$=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3 \tag{3.69}$$

其中$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$(见(1.205)、(1.206)、(1.204)式)为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}h_1\hat{e}_1+\mathrm{d}h_2\hat{e}_2+\mathrm{d}h_3\hat{e}_3=H_1\mathrm{d}q_1\hat{e}_1+H_2\mathrm{d}q_2\hat{e}_2+H_3\mathrm{d}q_3\hat{e}_3$$

$$\mathrm{d}h_1=H_1\mathrm{d}q_1,\quad \mathrm{d}h_2=H_2\mathrm{d}q_2,\quad \mathrm{d}h_3=H_3\mathrm{d}q_3$$

$$H_i=\sqrt{(\frac{\partial x_1}{\partial q_i})^2+(\frac{\partial x_2}{\partial q_i})^2+(\frac{\partial x_3}{\partial q_i})^2}$$

式(3.69)亦可改写成

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial h_1}\mathrm{d}h_1+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial h_2}\mathrm{d}h_2+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial h_3}\mathrm{d}h_3 \tag{3.70}$$

在t时刻,在图3.6中的P_0点取三个由质点组成的线元

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1=(\mathrm{d}h_1,0,0)=\mathrm{d}h_1\hat{e}_1=H_1\mathrm{d}q_1\hat{e}_1 \tag{3.71.1}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2=(0,\mathrm{d}h_2,0)=\mathrm{d}h_2\hat{e}_2=H_2\mathrm{d}q_2\hat{e}_2 \tag{3.71.2}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 = (0,0,\mathrm{d}h_3) = \mathrm{d}h_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 = H_3\mathrm{d}q_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{3.71.3}$$

于是据(3.69)或(3.70)式,则有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial h_1}\mathrm{d}h_1 = \left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + v_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + v_3\hat{\boldsymbol{e}})\right]\mathrm{d}h_1 \tag{3.72}$$

根据(1.228)、(1.229)、(1.230)式,则推出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1) = &(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3})\mathrm{d}h_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 \\ &+ (\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2})\mathrm{d}h_1\hat{\boldsymbol{e}}_2 \\ &+ (\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_3}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3})\mathrm{d}h_1\hat{\boldsymbol{e}}_3\end{aligned} \tag{3.73}$$

将上式两边点乘以式(3.71.1)所示的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ 后推出

$$\begin{aligned}\mathrm{d}h_1\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}h_1) &= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1) \\ &= (\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3})(\mathrm{d}h_1)^2\end{aligned}$$

根据 B_{11} 的物理意义,亦即 B_{11} 的定义,可由上式推出

$$B_{11} = \frac{1}{\mathrm{d}h_1}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}h_1) = \frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} \tag{3.74.1}$$

同理可以推 B_{22} 和 B_{33} 的表达式

$$B_{22} = \frac{1}{\mathrm{d}h_2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}h_2) = \frac{1}{H_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{v_1}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} \tag{3.74.2}$$

$$B_{33} = \frac{1}{\mathrm{d}h_3}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}h_3) = \frac{1}{H_3}\frac{\partial v_3}{\partial q_3} + \frac{v_1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} \tag{3.74.3}$$

将(3.71.2)式代进(3.70)式中并点乘以 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ 则推出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2) = (\frac{1}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1})\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2$$

将(3.73)式两边点乘以 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$ 则推出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\cdot\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1) = (\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2})\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2$$

将如上两式相加并考虑到在 $t=t$ 时 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\perp\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$,则推出在 t 时刻

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{D}\theta_{12}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2 &= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2) \\ &= (\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2} - \frac{v_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} \\ &\quad - \frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1})\mathrm{d}h_1\mathrm{d}h_2\end{aligned}$$

其中 θ_{12} 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$ 的夹角。根据 B_{12} 的物理意义,亦即 B_{12} 的定义,则由上式推出

$$B_{12} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}\theta_{12}}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{2}(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}$$

$$-\frac{v_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}) \tag{3.75.1}$$

同理可推出

$$B_{13}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}\theta_{13}}{\mathrm{D}t}=\frac{1}{2}(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_3}{\partial q_1}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial v_1}{\partial q_3}-\frac{v_3}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}-\frac{v_1}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}) \tag{3.75.2}$$

$$B_{23}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}\theta_{23}}{\mathrm{D}t}=\frac{1}{2}(\frac{1}{H_3}\frac{\partial v_2}{\partial q_3}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial v_3}{\partial q_2}-\frac{v_2}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}-\frac{v_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}) \tag{3.75.3}$$

在上式中 θ_{13}、θ_{23}分别 $\mathrm{d}r_1$ 和 $\mathrm{d}r_3$、$\mathrm{d}r_2$ 和 $\mathrm{d}r_3$ 的夹角。

3.6 体元、面元、线元的物质导数

本节研究对推导连续介质力学基本方程组非常重要的体元、面元和线元的物质导数。如下所做的微分均在直角坐标系中进行。

3.6.1 体元的物质导数

① 求体元 $\mathrm{d}V$ 的表达式

在 $t=t_0$ 时刻介质运动变形开始，介质中有一质点处于 P_0 点，P_0 点的坐标为$(X_1^{(0)},X_2^{(0)},X_3^{(0)})$，现以 P_0 或 $X^{(0)}$来标记这个质点。在该时刻有一个由物质微元 $\mathrm{d}X^{(1)}$、$\mathrm{d}X^{(2)}$、$\mathrm{d}X^{(3)}$构成的平行六面体体元 $\mathrm{d}V_0$，见图 3.7 所示，其中点 A_0、B_0、C_0 的位置矢量分别为 $X^{(1)}$、$X^{(2)}$、$X^{(3)}$.

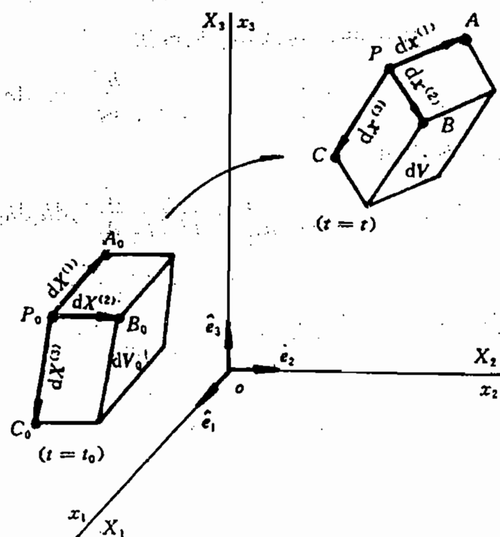


图 3.7

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{X}^{(1)} = \boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{X}^{(0)} &= \mathrm{d}X_1^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathrm{d}X_2^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \mathrm{d}X_3^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ \mathrm{d}\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{X}^{(2)} - \boldsymbol{X}^{(0)} &= \mathrm{d}X_1^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathrm{d}X_2^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \mathrm{d}X_3^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ \mathrm{d}\boldsymbol{X}^{(3)} = \boldsymbol{X}^{(3)} - \boldsymbol{X}^{(0)} &= \mathrm{d}X_1^{(3)}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \mathrm{d}X_2^{(3)}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \mathrm{d}X_3^{(3)}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \end{aligned}\right\} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_0 &= \mathrm{d}\boldsymbol{X}^{(1)} \times \mathrm{d}\boldsymbol{X}^{(2)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}^{(3)} \\ &= \in_{mnp}\mathrm{d}X_m^{(1)}\mathrm{d}X_n^{(2)}\mathrm{d}X_p^{(3)} \end{aligned} \tag{3.77}$$

到 $t=t$ 时刻，P_0、A_0、B_0、C_0 处的质点分别运动到 P、A、B、C 点，这些点的位置矢量分别为 $\boldsymbol{x}^{(0)}$、$\boldsymbol{x}^{(1)}$、$\boldsymbol{x}^{(2)}$、$\boldsymbol{x}^{(3)}$，物质线元的变化是：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{(1)} \to \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)} \quad , \quad \mathrm{d}\boldsymbol{X}^{(2)} \to \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)} \quad , \quad \mathrm{d}\boldsymbol{X}^{(3)} \to \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(3)}$$

根据质点运动的轨迹关系

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(X_1, X_2, X_3, t) \qquad \text{或} \qquad x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \tag{3.78}$$

则有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)} &= \boldsymbol{x}(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)}, t) - \boldsymbol{x}(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, X_3^{(0)}, t) \\ &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right)_{P_0}\mathrm{d}X_j^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_i \end{aligned} \tag{3.79.1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^{(0)} &= \boldsymbol{x}(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, X_3^{(2)}, t) - \boldsymbol{x}(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, X_3^{(0)}, t) \\ &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right)_{P_0}\mathrm{d}X_j^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_i \end{aligned} \tag{3.79.2}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{x}^{(3)} - \boldsymbol{x}^{(0)} &= \boldsymbol{x}(X_1^{(3)}, X_2^{(3)}, X_3^{(3)}, t) - \boldsymbol{x}(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, X_3^{(0)}, t) \\ &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right)_{P_0}\mathrm{d}X_j^{(3)}\hat{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j^{(3)}\hat{\boldsymbol{e}}_i \end{aligned} \tag{3.79.3}$$

注意，在如上诸式中函数的展开均在点 P_0 处，即偏导数$\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$在点 P_0 处取值，亦即

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right)_{P_0}$$

在 $t=t$ 时刻，物质体元的体积 $\mathrm{d}V$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)} \times \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(3)} \\ &= \in_{ijk}\frac{\partial x_i}{\partial X_m}\frac{\partial x_j}{\partial X_n}\frac{\partial x_k}{\partial X_p}\mathrm{d}X_m^{(1)}\mathrm{d}X_n^{(2)}\mathrm{d}X_p^{(3)} \end{aligned} \tag{3.80}$$

再据恒等式(identity)

$$\begin{aligned} \in_{ijk}\frac{\partial x_i}{\partial X_m}\frac{\partial x_j}{\partial X_n}\frac{\partial x_k}{\partial X_p} &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial X_m} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial X_n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial X_p} \\ &= \in_{mnp}\left(\in_{ijk}\frac{\partial x_i}{\partial X_1}\frac{\partial x_j}{\partial X_2}\frac{\partial x_k}{\partial X_3}\right) = \in_{mnp}J \end{aligned} \tag{3.81.1}$$

其中

$$J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \in_{ijk}\frac{\partial x_i}{\partial X_1}\frac{\partial x_j}{\partial X_2}\frac{\partial x_k}{\partial X_3} \tag{3.81.2}$$

利用(3.81.1)式并考虑到(3.77)式，则(3.80)式可写成

$$dV=\in_{mnp}JdX_m^{(1)}dX_n^{(2)}dX_p^{(3)}=JdV_0 \tag{3.82}$$

② 求 dV 的物质导数

对上式求物质导数，则有

$$\frac{D}{Dt}(dV)=\frac{D}{Dt}(JdV_0)=\frac{DJ}{Dt}dV_0 \tag{3.83}$$

又知(3.81.2)式可以表成另一种形式

$$J=\in_{ijk}\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k} \tag{3.84}$$

从而有

$$\begin{aligned}\frac{DJ}{Dt}&=\frac{D}{Dt}\left(\in_{ijk}\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k}\right)\\&=\in_{ijk}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k}+\in_{ijk}\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial X_j}\frac{\partial x_3}{\partial X_k}\\&\quad+\in_{ijk}\frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j}\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial X_k}\end{aligned} \tag{3.85}$$

其中

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial X_i}=\dfrac{\partial v_1}{\partial X_i}=\dfrac{\partial v_1}{\partial x_g}\dfrac{\partial x_g}{\partial X_i}\\[2ex]\dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial X_j}=\dfrac{\partial v_2}{\partial X_j}=\dfrac{\partial v_2}{\partial x_g}\dfrac{\partial x_g}{\partial X_j}\\[2ex]\dfrac{\partial \dot{x}_3}{\partial X_k}=\dfrac{\partial v_3}{\partial X_k}=\dfrac{\partial v_3}{\partial x_g}\dfrac{\partial x_g}{\partial X_k}\end{cases} \tag{3.86}$$

将上式代进(3.85)式中则给出

$$\dot{J}=\frac{DJ}{Dt}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}J+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}J+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}J=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}J \tag{3.87.1}$$

即

$$\dot{J}=J\mathrm{div}\boldsymbol{v}=J\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{3.87.2}$$

将上式代进(3.83)式便给出

$$\frac{D}{Dt}(dV)=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}dV=\mathrm{div}\boldsymbol{v}dV \tag{3.88}$$

上式就是**体元的物质导数**(material derivative of differential element of volume)。

3.6.2 面元的物质导数

① 求面元 dS 的表达式

在 $t=t_0$ 时刻介质运动、变形开始，这时在介质中有一质点 P_0，以及由该点为出发点的物质矢量 $d\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $d\boldsymbol{X}^{(2)}$ 所构成的面元 $dS^{(0)}$，见图 3.8。设这个有向面元的单位法线为 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(0)}$，于是该有向面元表示成

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{S}^{(0)}&=dS^{(0)}\hat{\boldsymbol{n}}^{(0)}=dS_g^{(0)}\hat{\boldsymbol{e}}_g\\&=d\boldsymbol{X}^{(1)}\times d\boldsymbol{X}^{(2)}\end{aligned}$$

$$=\in_{gmn}\mathrm{d}X_m^{(1)}\mathrm{d}X_n^{(2)}\hat{e}_g \quad (3.89)$$

到 $t=t$ 时刻，原处于 P_0 点的质点运动到 P 点、物质面元 $\mathrm{d}S^{(0)}$ 变成了 $\mathrm{d}S$，其原物质矢量是这样变化：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{(1)}\rightarrow\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)}\quad,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{X}^{(2)}\rightarrow\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}$$

参照(3.79)式，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)}=\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j^{(1)}\hat{e}_i$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}=\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j^{(2)}\hat{e}_i$$

于是面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可表成(设 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为该面的单位法线)：

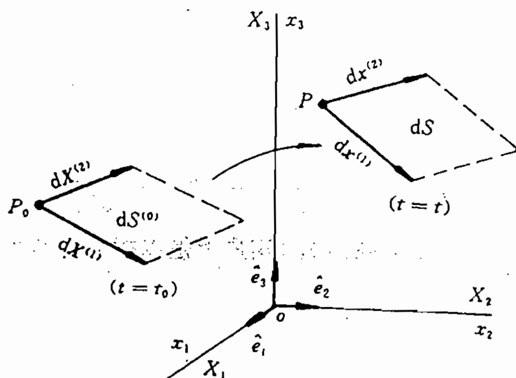


图 3.8

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}}=\mathrm{d}S_i\hat{e}_i\\&=\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)}\times\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}=\in_{ijk}\mathrm{d}x_j^{(1)}\mathrm{d}x_k^{(2)}\hat{e}_i\\&=\in_{ijk}\frac{\partial x_j}{\partial X_m}\frac{\partial x_k}{\partial X_n}\mathrm{d}X_m^{(1)}\mathrm{d}X_n^{(2)}\hat{e}_i\end{aligned}\quad(3.90)$$

而

$$\in_{ijk}=\in_{pjk}\delta_{pi}\quad,\quad\delta_{pi}=\frac{\partial x_p}{\partial x_i}=\frac{\partial x_p}{\partial X_g}\frac{\partial X_g}{\partial x_i}$$

即有

$$\in_{ijk}=\frac{\partial X_g}{\partial x_i}\in_{pjk}\frac{\partial x_p}{\partial X_g}$$

于是(3.90)式可以写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\partial X_g}{\partial x_i}\in_{pjk}\frac{\partial x_p}{\partial X_g}\frac{\partial x_j}{\partial X_m}\frac{\partial x_k}{\partial X_n}\mathrm{d}X_m^{(1)}\mathrm{d}X_n^{(2)}\hat{e}_i\quad(3.91)$$

利用恒等式(3.81)，上式中的一部分可以改写，具体地

$$\begin{aligned}\in_{pjk}\frac{\partial x_p}{\partial X_g}\frac{\partial x_j}{\partial X_m}\frac{\partial x_k}{\partial X_n}&=\in_{gmn}\left(\in_{pjk}\frac{\partial x_p}{\partial X_1}\frac{\partial x_j}{\partial X_2}\frac{\partial x_k}{\partial X_3}\right)\\&=\in_{gmn}J=J\in_{gmn}\end{aligned}$$

于是(3.91)式写成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}S_i\hat{e}&=\frac{\partial X_g}{\partial x_i}J\in_{gmn}\mathrm{d}X_m^{(1)}\mathrm{d}X_n^{(2)}\hat{e}_i\\&=J\frac{\partial X_g}{\partial x_i}\mathrm{d}S_g^{(0)}\hat{e}_i\end{aligned}\quad(3.92.1)$$

即

$$\mathrm{d}S_i=J\frac{\partial X_g}{\partial x_i}\mathrm{d}S_g^{(0)}\quad(3.92.2)$$

② 求 $\mathrm{d}S$ 的物质导数

对上式求物质导数，则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}S_i)&=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(J\frac{\partial X_g}{\partial x_i}\mathrm{d}S_g^{(0)}\right)\\&=\frac{\mathrm{D}J}{\mathrm{D}t}\frac{\partial X_g}{\partial x_i}\mathrm{d}S_g^{(0)}+J\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial X_g}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}S_g^{(0)}\end{aligned}\quad(3.93)$$

现求上式中的$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\frac{\partial X_g}{\partial x_i})$。已知

$$\delta_{gm}=\frac{\partial X_g}{\partial X_m}=\frac{\partial X_g}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial X_m}=\frac{\partial x_n}{\partial X_m}\frac{\partial X_g}{\partial x_n}$$

对上式求物质导数，则有

$$0=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\delta_{gm})=\frac{\partial v_n}{\partial X_m}\frac{\partial X_g}{\partial x_n}+\frac{\partial x_n}{\partial X_m}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\frac{\partial X_g}{\partial x_n})$$

对上式两边乘以 $\partial X_m/\partial x_i$（实质上是以指标 m 作和），则给出

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\frac{\partial X_g}{\partial x_n}+\delta_{ni}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\frac{\partial X_g}{\partial x_n})=0$$

从而推出

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\frac{\partial X_g}{\partial x_i})=-\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\frac{\partial X_g}{\partial x_n} \tag{3.94}$$

利用(3.94)和(3.87)式，(3.93)式可写成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}S_i)&=\frac{\partial v_k}{\partial x_k}J\frac{\partial X_g}{\partial x_i}\mathrm{d}S_g^{(0)}-\frac{\partial v_n}{\partial x_i}J\frac{\partial X_g}{\partial x_n}\mathrm{d}S_g^{(0)}\\&=\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\mathrm{d}S_i-\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\mathrm{d}S_n\\&=\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\mathrm{d}S_i-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\mathrm{d}S_j\end{aligned} \tag{3.95}$$

上式就是**面元的物质导数**(material derivative of differential element of area)。

3.6.3 线元的物质导数

在介质运动变形开始时($t=t_0$)，有一物质线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$，到 $t=t$ 时刻该线元变成 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 根据(3.79)式，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ 的关系为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j \quad \text{或} \quad \mathrm{d}x_i=\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j \tag{3.96}$$

对线元求物质导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x_i)&=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j)=\frac{\partial v_i}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j\\&=\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j=\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\end{aligned} \tag{3.97}$$

对于线元的平方求物质导数

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x)^2=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i)=2\mathrm{d}x_i\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x_i)$$

据(3.97)式，上式可以写成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x)^2&=2\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k\\&=\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k+\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k\\&=\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_i=(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i})\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k\end{aligned}$$

$$= 2B_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{3.98.1}$$

或写成

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\mathrm{d}x)^2 = 2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{3.98.2}$$

式(3.98)就是线元平方的物质导数(material derivative of squared length of differential line element)。

3.7 体积分、面积分和线积分的物质导数

利用上节三个微元的物质导数,可以严格地导出体积分、面积分和线积分的物质导数(material derivatives of valume,surface and line integrals)。

由于不是介质的所有性质(物理量)都是对质点定义的,即不是所有的物理量都作为空间点的函数。在连续介质中有些物理量是定义为介质有限部分的积分,这些积分可能是体积分、面积分或线积分。

设在连续介质中存在一个对质点定义的函数 Ψ,即这个函数是作为物质坐标的函数 $\Psi=F(\boldsymbol{X},t)$,或者等价地作为空间坐标的函数 $\Psi=f(\boldsymbol{x},t)$,即

$$\Psi = f(\boldsymbol{x},t) = f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),t) = F(\boldsymbol{X},t) \tag{3.99}$$

这个函数可以代表一个标量,或者代表一个矢量或张量的一个分量。由于在直角笛卡尔坐标系中研究,且两个坐标系重合,单位矢量的大小方向不变,所研究的分量就代表了整个矢量或张量。

3.7.1 体积分的物质导数

函数 $\Phi=\Phi(t)$ 为式(3.99)所示的函数 Ψ 的体积分,即

$$\Phi = \Phi(t) = \int_V f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}V \tag{3.100}$$

其中 V 为 $t=t$ 时刻由介质中一些确定的连续质点所占据的欧拉空间体积,见图 3.9。尽管这个体积 V 随时间改变,但组成这个体积 V 的诸质点在任何时刻保持不变,这些质点在介质运动、变形开始时的总体积为 V_0,V_0 亦即这些质点在拉格朗日空间的体积。V 中的诸质点当然遵循式(3.78)所示的运动规律,即有

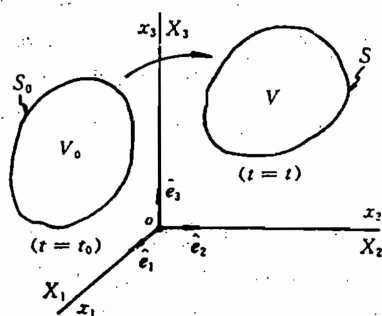


图 3.9

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t) \quad 或 \quad x_i = x_i(X_1,X_2,X_3,t) \tag{3.101}$$

物质体元 $\mathrm{d}V_0$ 与空间体元 $\mathrm{d}V$ 之间遵循(3.82)式,即

$$\mathrm{d}V = J\mathrm{d}V_0 \tag{3.102}$$

$$J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right| \tag{3.103}$$

将欧拉空间中积分的(3.100)式若再换成拉格朗日空间中积分,则写成

$$\Phi = \int_V f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}V = \int_{V_0} F(\boldsymbol{X},t)J\mathrm{d}V_0 \tag{3.104}$$

对上式求物质导数

$$\frac{D\Phi}{Dt}=\frac{D}{Dt}\int_V f(x,t)dV=\frac{D}{Dt}\int_{V_0}F(X,t)JdV_0$$

$$=\int_{V_0}\frac{D}{Dt}[F(X,t)JdV_0]$$

亦即有

$$\frac{D}{Dt}\int_V f(x,t)dV=\int_V\frac{D}{Dt}[f(x,t)dV] \tag{3.105}$$

从这一事实看出，对于物质体积的体积分求物质导数可以将微分符号(differential symbol)直接拿到积分号内，但要包括对体元的微商(differentiate)。

将上式的右边分项微商并利用(3.88)式，则该式化成

$$\frac{D}{Dt}\int_V f(x,t)dV=\int_{V_0}\left\{\frac{D}{Dt}[f(x,t)]+\frac{\partial v_i}{\partial x_i}f(x,t)\right\}JdV_0$$

$$=\int_V\left\{\frac{D}{Dt}[f(x,t)]+\frac{\partial v_i}{\partial x_i}f(x,t)\right\}dV$$

$$=\int_V\left\{\frac{\partial}{\partial t}[f(x,t)]+\frac{\partial}{\partial x_i}[v_if(x,t)]\right\}dV \tag{3.106.1}$$

利用高斯定理(Gauss'theorem)，上式右边第二部分可以化成面积分，于是上式变为

$$\frac{D}{Dt}\int_V f(x,t)dV=\int_V\frac{\partial}{\partial t}[f(x,t)]dV+\oint_S v_nf(x,t)dS \tag{3.106.2}$$

其中 $v_n=v\cdot\hat{n}$，而 $\hat{n}$ 为面元 dS 的单位外法线，S 为体积 V 的包面。(3.106.2)式便是**体积分的物质导数**(material derivative of volume integral)。

3.7.2 面积分的物质导数

函数 $G_i=G_i(t)$ 为式(3.99)所示函数 Ψ 的面积分，即

$$G_i=G_i(t)=\int_S f(x,t)d_1S_i \tag{3.107}$$

与体积分的情形类似，上式中的 S 为 $t=t$ 时刻介质中一些确定的连续质点所组成的欧拉空间曲面，构成该曲面的那些质点当然在任何时刻保持不变，可是这个曲面的形状和大小均随时间改变，它在运动变形开始时($t=t_0$ 时刻)为 $S^{(0)}$，而 $S^{(0)}$ 亦即这些质点在拉格朗日空间所构成的曲面。我们所取的物质坐标系和空间坐标系仍同图3.9所示，但曲面 S 则不一定是封闭曲面(closed surface)，式(3.107)中的 dS_i 为 S 上一块有向面元(differential element of directive area)dS 的一个分量。两个空间的变量变换仍按(3.101)式的关系。dS_i 与 $dS_i^{(0)}$ 之间的关系按(3.92)式有

$$dS_i=J\frac{\partial X_j}{\partial x_i}dS_j^{(0)} \tag{3.108}$$

若将欧拉空间的积分(3.107)式再改换成拉格朗日空间中的积分，则有

$$G_i=\int_S f(x,t)dS_i=\int_{S^{(0)}}F(X,t)J\frac{\partial X_j}{\partial x_i}dS_j^{(0)} \tag{3.109}$$

对上式求物质导数，则有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_S f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}S_i=\int_{S^{(0)}}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}[F(\boldsymbol{X},t)J\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\mathrm{d}S_j^{(0)}]$$

$$=\int_S\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}[f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}S_i] \tag{3.110}$$

这同体积分的物质导数求法一样，微分号与积分号可以互换，见(3.105)式。从物理上讲这也是理所当然的，因为如上所研究的不管是体积分还是面积分，其所进行积分的区域(体积或曲面)均为确定的质点所组成，所以不管V或S的位形如何变化，组成的质点不变，故对这些质点总体的物理量求物质导数时当然与V或S无关，于是可将微分符号拿到积分号内。

将(3.110)式进一步微商并用(3.95)式，则得到

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_S f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}S_i=\int_S[\frac{\mathrm{D}f(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}S_i+f(\boldsymbol{x},t)(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\mathrm{d}S_i-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\mathrm{d}S_j)]$$

$$=\int_S[\frac{\mathrm{D}f(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{D}t}+\frac{\partial v_j}{\partial x_j}f(\boldsymbol{x},t)]\mathrm{d}S_i-\int_S f(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\mathrm{d}S_j \tag{3.111}$$

上式便是**面积分的物质导数**(material derivative of surface integral)。

3.7.3 线积分的物质导数

函数$H_i=H_i(t)$为式(3.99)所示函数Ψ的线积分，即

$$H_i=H_i(t)=\int_L f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}x_i \tag{3.112}$$

其中L为$t=t$时刻介质中一些确定的连续质点所组成的欧拉空间曲线，尽管曲线的形状和长短随时间变化，但构成这条曲线的那些质点始终保持不变。设该曲线在介质运动、变形开始时为L_0，曲线L_0亦即L曲线在拉格朗日空间的形式。物质坐标系和空间坐标系仍同图3.9所示。上式中$\mathrm{d}x_i$为线元矢量$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$的一个分量，两个空间的变量关系仍按(3.101)式的关系，空间线元$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$与物质线元$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$的关系，按分量(见(3.96)式)为

$$\mathrm{d}x_i=\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j \tag{3.113}$$

将欧拉空间的积分(3.112)式若再改换成拉格朗日空间的积分，则有

$$H_i=\int_L f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}x_i=\int_{L_0}F(\boldsymbol{X},t)\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j \tag{3.114}$$

对上式求物质导数，则有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_L f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}x_i=\int_{L_0}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}[F(\boldsymbol{X},t)\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\mathrm{d}X_j]$$

$$=\int_L\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}[f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}x_i] \tag{3.115}$$

同对体积分和面积分求物质导数一样，微分号与积分号可以交换。

将上式进一步微分并利用(3.97)式，则有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_L f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}x_i=\int_L\frac{\mathrm{D}f(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}x_i+\int_L f(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \tag{3.116}$$

上式就是**线积分的物质导数**(material derivative of line integral)。

3.8 皮欧勒-基尔霍夫应力张量

在求连续介质的具体问题时，必然涉及问题的初始和边界条件，也就是要根据初始和边界条件来定解。然而随着介质的变形和运动，原初始边界的形状和位置亦在变化之中，除了在初始时已知外，之后在分析解(analytical solution)求得之前是未知。

如果描述问题的方程组可解，当然在求得通解(general solution)之后，便可利用给定的边初条件定解，整个变化的边界也完全可知。

但是许多实际问题不能求得分析解，必须数值积分(numerical integral)，在数值求解过程中当然要利用边初条件，显然若按欧拉描述数值解，原给出的边界现无法准确确定。为了精确地利用边界条件，往往将方程组化成拉格朗日描述，从而初始的边界便是"永恒不变的"，位置永远已知。

把描述问题的方程组变成拉格朗日方程组，其中一个最重要的问题是应力张量的变换，即把现作用在实际面 S 上的应力矢量换算成该面初始时的面 $S^{(0)}$ 上，(S 和 $S^{(0)}$ 均为同样质点组成的面)，也就是把真应力(real stress)亦称哥西应力(Cauchy's stress)换算成工程应力(engineering stress)。

现考虑由一些固定的连续质点组成的面元，初始时刻它为 $\mathrm{d}S^{(0)}$、单位法线为 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(0)}$，在 $t=t$ 时刻变成 $\mathrm{d}S$、单位法线为 $\hat{\boldsymbol{n}}$，见图 3.10。

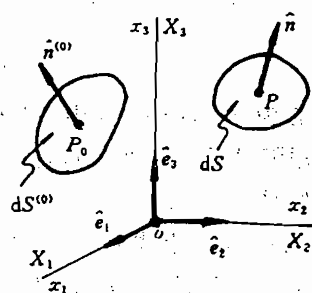


图 3.10

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{S}^{(0)} = \mathrm{d}S^{(0)}\hat{\boldsymbol{n}}^{(0)} = \mathrm{d}S_i^{(0)}\hat{\boldsymbol{e}}_i \\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}} = \mathrm{d}S_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \end{cases} \tag{3.117}$$

据(3.92.2)式，则有

$$\mathrm{d}S_i = J\frac{\partial X_g}{\partial x_i}\mathrm{d}S_g^{(0)} \tag{3.118}$$

把 t 时刻作用在 $\mathrm{d}S$ 面上的应力矢量 $\boldsymbol{t}^{(\hat{n})}$ 换算成对于 $\mathrm{d}S^{(0)}$ 的应力矢量 $\boldsymbol{t}^{(\hat{n}^{(0)})}$，两个面上的总作用力应相等，即有

$$\boldsymbol{t}^{(\hat{n})}\mathrm{d}S = \boldsymbol{t}^{(\hat{n}^{(0)})}\mathrm{d}S^{(0)} \tag{3.119}$$

其中

$$\boldsymbol{t}^{(\hat{n})} = \boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \tag{3.120}$$

$$\boldsymbol{t}^{(\hat{n}^{(0)})} = \boldsymbol{\Sigma}^{(0)}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(0)} \tag{3.121}$$

上式中新引进的张量 $\boldsymbol{\Sigma}^{(0)}$ 称作第一皮欧勒-基尔霍夫应力张量(first Piola－Kirchhoff stress tensor)。由(3.117)～(3.121)式得到

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = \boldsymbol{\Sigma}^{(0)}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(0)}\mathrm{d}S^{(0)}$$

即

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Sigma}^{(0)}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}^{(0)} \tag{3.122}$$

而据(3.118)式，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = J\mathbf{F}_c^{-1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}^{(0)} \tag{3.123}$$

其中
$$\mathbf{F}=\left\{\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right\}\quad,\quad \mathbf{F}^{-1}=\left\{\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right\}$$

$$\mathbf{F}_c^{-1}\cdot \mathrm{d}S^{(0)}=\frac{\partial X_g}{\partial x_i}\mathrm{d}S_g^{(0)}\hat{e}_i$$

$$J=\left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right|$$

将(3.123)式代进(3.122)式给出

$$J\Sigma\cdot\mathbf{F}_c^{-1}\cdot \mathrm{d}S^{(0)}=\Sigma^{(0)}\cdot \mathrm{d}S^{(0)}\tag{3.124}$$

由于 $\mathrm{d}S^{(0)}$ 是任取的，从而推出

$$\Sigma^{(0)}=J\Sigma\cdot\mathbf{F}_c^{-1}\tag{3.125.1}$$

亦即

$$\sigma_{ij}^{(0)}=J\sigma_{ik}\frac{\partial X_j}{\partial x_k}\tag{3.125.2}$$

有了(3.125)式所示的张量后，便可将介质运动按拉格朗日描述，如对动量守恒方程

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_0}\rho_0 \boldsymbol{v}\mathrm{d}V_0=\oint_{S^{(0)}}\Sigma^{(0)}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(0)}\mathrm{d}S_0+\int_{V_0}\rho_0\boldsymbol{b}\mathrm{d}V_0\tag{3.126}$$

在上式中 V_0 为介质变形的初始体积即物质体积，$S^{(0)}$ 为 V_0 的包面，ρ_0 为初始密度。由于 V_0 是任取的，于是由上式推出

$$\rho_0\dot{\boldsymbol{v}}=\mathrm{div}\Sigma_c^{(0)}+\rho_0\boldsymbol{b}\tag{3.127.1}$$

表成分量形式为

$$\rho_0\dot{v}_i=\frac{\partial\sigma_{ij}^{(0)}}{\partial X_j}+\rho_0 b_i\tag{3.127.2}$$

或者写成

$$\rho_0\dot{v}_i=\frac{\partial}{\partial X_j}\left(J\sigma_{ik}\frac{\partial X_j}{\partial x_k}\right)+\rho_0 b_i\tag{3.127.3}$$

这就是在拉格朗日坐标(直角笛卡尔坐标系)下的运动方程。

在上面引进的 $\Sigma^{(0)}$ 是不对称的。为了使用方便，有时使用**第二皮欧勒-基尔霍夫应力张量** $\Sigma^{(*)}$，它定义作

$$\Sigma^{(*)}=\mathbf{F}^{-1}\cdot\Sigma^{(0)}=J\mathbf{F}^{-1}\cdot\Sigma\cdot\mathbf{F}_c^{-1}\tag{3.128}$$

从而有

$$\Sigma=\frac{1}{J}\mathbf{F}\cdot\Sigma^{(*)}\cdot\mathbf{F}_c\tag{3.129}$$

习题

3.1 连续介质运动由下式给出

$$\begin{cases}x_1=X_1\mathrm{e}^t+X_3(\mathrm{e}^t-1)\\ x_2=X_3(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})+X_2\\ x_3=X_3\end{cases}$$

证明对该运动，雅可比行列式 J 不为零，并确定 X_i 作为 x_1、x_2、x_3、t 的函数形式。

3.2 某连续介质运动由下式给出

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = e^t(X_2 + X_3)/2 + e^{-t}(X_2 - X_3)/2 \\ x_3 = e^t(X_2 + X_3)/2 - e^{-t}(X_2 - X_3)/2 \end{cases}$$

请确定作为物质形式和空间形式描述的速度分量。

3.3 某一流动的速度场为

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = A(x_1x_2 - x_3^2)e^{-Bt} \\ v_3 = A(x_2^2 - x_1x_3)e^{-Bt} \end{cases}$$

式中 A、B 为常数。请确定该流动的速度梯度 $\partial v_i/\partial x_j$，并计算在 $t=0$ 时在点(1,0,3)处的变形速度张量和旋度张量。

3.4 一定常速度场为

$$v_1 = 2x_3 \quad , \quad v_2 = 2x_3 \quad , \quad v_3 = 0$$

请确定变形速度张量的主方向和主值。

3.5 确定通过曲面 S 的矢量 $\boldsymbol{P} = P_i\hat{e}_i$ 的流量(flux)的物质导数，给出按指标写法的 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_S P_i\mathrm{d}S_i$ 的表达式和按抽象符号写法的 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_S \boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S$ 的表达式。$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为面元 $\mathrm{d}S$ 的单位法线。

3.6 根据旋度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 和旋度张量 $\boldsymbol{Z}$ 的定义，证明

$$z_{ij} = \in_{ijk}\omega_k \qquad 以及 \qquad 2\omega_i = \in_{jik}Z_{jk}$$

3.7 证明加速度 $\boldsymbol{a}$ 可以写成

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2$$

3.8 证明

$$\frac{\mathrm{d}(\ln J)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

其中 J 为雅可比行列式。

3.9 证明对于旋度矢量 $\boldsymbol{\omega}=\omega_i\hat{e}_i$ 有一下式成立

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V 2\omega_i\mathrm{d}V = \oint_S[\in_{ijk}a_k + 2\omega_jv_i - 2\omega_iv_j]\mathrm{d}S_j$$

式中 a_k 为加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 的分量。

3.10 如果给出流场为如下函数

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}/(1+t) \qquad 或 \qquad v_i = x_i/(1+t)$$

证明在此种情况下流线和迹线重合。

3.11 证明如下的速度场的流线是圆周线

$$\begin{cases} v_1 = x_1^2x_2 + x_2^3 \\ v_2 = -x_1^3 - x_1x_2^2 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

3.12 在一个随流体运动的电场，电场强度(electrical field strength)为：$I=(A\cos3t)/r$，其中 $r^2=x_1^2+x_2^2$，A 为常数。流体的流动速度如上题所给。请确定 $\mathrm{D}I/\mathrm{D}t$.

3.13 证明总旋度(total vorticity)的物质导数为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V 2\omega_i\mathrm{d}V = \oint_S[\in_{ijk}a_k + 2\omega_jv_i]\mathrm{d}S_j$$

其中 ω_i 为旋度 $2\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ 的分量。

3.14　证明如下恒等式

$$\in_{pqr}(v_s v_{r,s})_{,q} = q_p v_{q,q} + v_q q_{p,q} - q_q v_{p,q}$$

在上式中下标前加“,”表示偏导数，如 $v_{r,s}=\partial v_r/\partial x_s$。式中的 $q_i=2\omega_i$。

参考文献

[1] Mase G E. Theory and Problems of Continuum Mechanics, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1975

[2] 王仁．弹性力学讲义．北京：北京大学，1963

[3] 吴望一．流体力学．北京：北京大学出版社，1982

[4] 杜珣．连续介质力学引论．北京：清华大学出版社，1985

[5] Courant R. Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience Publishers, Inc. 1956 (中译本：R. 柯朗　K.O. 弗里德里克斯．超声速流与冲击波．李维新等译．北京：科学出版社，1986)

第四章　连续介质力学的基本定律

本章将描述连续介质力学各个分支共同遵守的基本定律。

4.1　质量守恒、连续性方程

有一个同一切连续介质都有关的重要的量——质量(mass)。物质不生不灭，故介质在运动中保持质量不变。这就是质量守恒(conservation of mass)。

在 t 时刻，占据空间体积为 V 的那部分连续介质的质量 m 由如下积分给出

$$m = \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{4.1}$$

其中 $\rho=\rho(x,t)$ 为质量密度，简称密度(density)，它为空间坐标的连续函数(continuous function of spatial coordinates)。根据质量守恒定律(law of conservation of mass)，如上积分在介质运动时应保持不变，即有

$$m = \int_V \rho \mathrm{d}V = \text{const} \tag{4.2}$$

4.1.1　欧拉形式的连续性方程

对(4.2)式求物质导数并利用(3.106.1)式，则有

$$\frac{\mathrm{D}m}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V \rho \mathrm{d}V = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}V = 0 \tag{4.3.1}$$

利用高斯定理，上式第二部分可以化成面积分，即有

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V = -\oint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}S = -\oint_S v_n \rho \mathrm{d}S \tag{4.3.2}$$

在上式中 S 为物质体积 V 的包面，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为面元 $\mathrm{d}S$ 的单位矢量，$\boldsymbol{v}$ 为质点速度。从式(4.3.2)看出，在 t 时刻 V 中介质单位时间增加的质量 $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V$ 等于单位时间穿过 S 面流进的质量 $-\oint_S v_n \rho \mathrm{d}S$.

式(4.3)为作为积分形式的连续性方程(continuity equation in integral form)。

由于(4.3)式对于任意体积 V 都成立，所以式(4.3.1)中的被积函数(integrand)必须为零，于是有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \tag{4.4.1}$$

上式亦可写成

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{4.4.2}$$

式(4.4)则为微分形式的连续性方程(continuity equation in differential form)。

如果介质运动是等容的(isovolumetric)，即对于不可压连续介质(incompressible continuum)，亦即质点密度与 t 无关，即有

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{4.5}$$

于是由(4.4)式推出

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{4.6}$$

对于这种不可压介质的速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$，可以利用一个称之为矢量位势 $\boldsymbol{\Phi}$(vector potential)来表示，即有

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{\Phi} \qquad 或 \qquad v_i = \in_{ijk} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \tag{4.7}$$

4.1.2 拉格朗日形式的连续性方程

已知 ρ 是作为欧拉空间的连续函数，通过欧拉坐标 $\boldsymbol{x}$ 和拉格朗日坐标 $\boldsymbol{X}$ 的关系，亦可将它化成拉格朗日空间的连续函数 ρ^*

$$\rho = \rho(\boldsymbol{x},t) = \rho(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),t) = \rho^*(\boldsymbol{X},t) = \rho^* \tag{4.8}$$

在介质运动、变形开始时(即 $t=t_0$ 时，现取 $t_0=0$)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},0) = \boldsymbol{X} \tag{4.9}$$

即有

$$\rho(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},0),0) = \rho^*(\boldsymbol{X},0) = \rho_0 \tag{4.10}$$

根据质量守恒式(4.2)，则有

$$\int_V \rho \mathrm{d}V = \int_V \rho(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}V \equiv \int_{V_0} \rho^*(\boldsymbol{X},0)\mathrm{d}V_0 = \int_{V_0} \rho_0 \mathrm{d}V_0 \tag{4.11}$$

如上积分虽是对于两个时刻；初始($t=0$)和现在($t=t$)，但都是对于同一部分介质的。V 是这些介质现在所占据的空间体积、V_0 为开始时所占的空间体积。根据体元变换的(3.82)式，上式左边积分可以改写成对 V_0 的积分，即有

$$\int_V \rho \mathrm{d}V = \int_{V_0} \rho^*(\boldsymbol{X},t)J\mathrm{d}V_0 = \int_{V_0} \rho(x,t)J\mathrm{d}V_0 = \int_{V_0} \rho J\mathrm{d}V_0$$

将上式代到(4.11)式的左边则推出

$$\int_{V_0} \rho J\mathrm{d}V_0 = \int_{V_0} \rho^* J\mathrm{d}V_0 \equiv \int_{V_0} \rho_0 \mathrm{d}V_0 \tag{4.12}$$

由于上式对于任取的 V_0 都成立，从而得出

$$\rho_0 = J\rho \tag{4.13}$$

其中

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|$$

式(4.13)便是拉格朗日积分形式的连续性方程(continuity equation in Lagrangian integral form)。

将式(4.13)微分，即求物质导数，则给出

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho J) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho^* J) = 0 \tag{4.14}$$

上式便是连续性方程的拉格朗日的微分形式(Lagrangian differential form)。将上式进一步微分并利用(3.87)式，则又得到(4.4)式的形式，即

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho J)=\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}J+\rho\frac{\mathrm{D}J}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}J+\rho J\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$$

从而推出

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$$

4.1.3 质量守恒的一个推论

从质量守恒可以给出如下的一重要推论(inference)

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V\rho\Psi\mathrm{d}V=\int_V\rho\frac{\mathrm{D}\Psi}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V \tag{4.15}$$

其中函数 Ψ,它可代表一个标量或者矢量或张量的一个分量,现在笛卡尔直角坐标系中研究问题,且空间坐标系与物质坐标系重合。

证明 将(4.15)式的左边积分由欧拉空间换成拉格朗日空间,即积分域 V 换成 V_0,并考虑到(3.82)式,则有

$$\int_V\rho\Psi\mathrm{d}V=\int_{V_0}\rho^*\Psi^*J\mathrm{d}V_0=\int_{V_0}\rho\Psi J\mathrm{d}V_0 \tag{4.16}$$

其中 ρ^* 和 Ψ^* 均作为物质坐标 $\boldsymbol{X}$ 的函数,即

$$\rho^*=\rho^*(\boldsymbol{X},t)=\rho^*(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t),t)=\rho(\boldsymbol{x},t)=\rho \tag{4.17}$$

$$\Psi^*=\Psi^*(\boldsymbol{X},t)=\Psi^*(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t),t)=\Psi(\boldsymbol{x},t)=\Psi \tag{4.18}$$

对(3.16)式求物质导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V\rho\Psi\mathrm{d}V&=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_0}\rho\Psi J\mathrm{d}V_0\\&=\int_{V_0}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\Psi\rho J)\mathrm{d}V_0\\&=\int_{V_0}\frac{\mathrm{D}\Psi}{\mathrm{D}t}\rho J\mathrm{d}V_0+\int_{V_0}\Psi\frac{\mathrm{D}(\rho J)}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V_0\end{aligned}$$

据(4.14)式,上式右边第二项为零,从而推出

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V\rho\Psi\mathrm{d}V=\int_{V_0}\frac{\mathrm{D}\Psi}{\mathrm{D}t}\rho J\mathrm{d}V_0=\int_V\rho\frac{\mathrm{D}\Psi}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V$$

于是推论证毕。当然,Ψ 作为矢量或张量,如上的结果亦照样成立。

(4.15)式告诉我们,是凡体积分中被积函数为几个函数之积且其中一个为密度 ρ 时,在对这个体积分求物质导数时,可以将微分符拿进积分号内且只对除 ρ 以外的那几个函数微分,即将 ρ 作为“常数”。

4.2 动量守恒、运动方程

在 $t=t$ 时刻有一体积为 V 的一部分运动的介质如图 4.1 所示。设 V 的包面为 S。在 V 中作用着体力 $\boldsymbol{b}$、在 V 表面作用着面力矢量 $\boldsymbol{t}^{(\hat{n})}$,$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为面 $\mathrm{d}S$ 的单位外法线,介质所占的区域存在速度场 $\boldsymbol{v}$,即有

$$\begin{cases} b = b_i\hat{e}_i \\ \hat{n} = n_i\hat{e}_i \\ v = v_i\hat{e}_i \\ t^{(\hat{n})} = t_i\hat{e}_i = \Sigma\cdot\hat{n} = \hat{n}\cdot\Sigma = \sigma_{ji}n_j\hat{e}_i \end{cases} \tag{4.19}$$

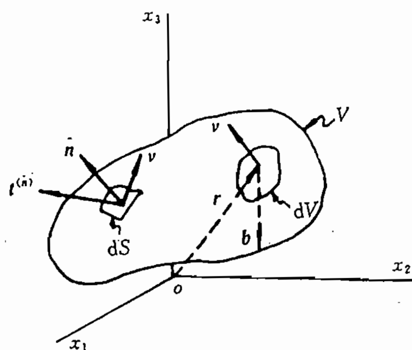


图 4.1

体积为 V 的介质中在本时刻所具有的总动量* (total momentum)$M=M_i\hat{e}_i$ 为

$$M = M(t) = \int_V \rho v \mathrm{d}V \quad (4.20.1)$$

或写成

$$M_i = M_i(t) = \int_V \rho v_i \mathrm{d}V \quad (4.20.2)$$

作用在 V 中及表面的合力(resultant force)$F=F_i\hat{e}_i$ 为

$$F = \oint_S t^{(\hat{n})}\mathrm{d}S + \int_V \rho b \mathrm{d}V \tag{4.21.1}$$

或写成

$$F_i = \oint_S t_i^{(\hat{n})}\mathrm{d}S + \int_V \rho b_i \mathrm{d}V \tag{4.21.2}$$

根据牛顿第二定律(Newton's second law):在惯性系内(in inertial reference system),介质总的动量随时间的变化率等于作用在所考虑这部介质的合力。于是由(4.20)和(4.21)式得到

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V \rho v \mathrm{d}V = \oint_S t^{(\hat{n})}\mathrm{d}S + \int_V \rho b \mathrm{d}V = F \tag{4.22.1}$$

或写成(在直角坐标系中)

$$\frac{\mathrm{D}M_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V \rho v_i \mathrm{d}V = \oint_S t_i^{(\hat{n})}\mathrm{d}S + \int_V \rho b_i \mathrm{d}V = F_i \tag{4.22.2}$$

利用(4.15)式和(4.19)式,则由(4.22)式得到

$$\begin{aligned} \int_V \rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V &= \oint_S \hat{n}\cdot\Sigma \mathrm{d}S + \int_V \rho b \mathrm{d}V \\ &= \int_V \nabla\cdot\Sigma \mathrm{d}S + \int_V \rho b \mathrm{d}V = \int_V (\nabla\cdot\Sigma + \rho b)\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{4.23.1}$$

或写成

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V &= \oint_S \sigma_{ji}n_j \mathrm{d}S + \int_V \rho b_i \mathrm{d}V \\ &= \int_V \frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}\mathrm{d}V + \int_V \rho b_i \mathrm{d}V = \int_V \left(\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i\right)\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{4.23.2}$$

式(4.23)便是积分形式的动量守恒(conservation of momentum in integral form)。

由于在式(4.23)中积分体积 V 是任意的,所以推出

* 动量亦称作线动量(linear momontum),之所以如此称呼,是用以区别相对论力学(Relativistic Mechanics)中的动量.

$$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \boldsymbol{b} \tag{4.24.1}$$

或写成

$$\rho \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \tag{4.24.2}$$

式(4.24)称为运动方程(equation of motion)。

有一种重要情况——静平衡(static equilibrium),在一般的固体力学(Solid Mechanics)中所碰到的正是这种情况。在静平衡时,式(4.24)中的加速为零,从而得到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \boldsymbol{b} = 0 \tag{4.25.1}$$

或写成(在直角坐标系中)

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0 \tag{4.25.2}$$

这就是所说的平衡方程(equilibrium equation),它广泛地用于固体力学中。上式在直角坐标系的展开形式为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho b_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0 \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ij} \end{cases} \tag{4.26}$$

4.3 动量矩原理与应力张量的对称性

在 2.4 节中曾指出,在介质中如果不存在分布力矩时,应力张量对称,但没有具体证明。本节将利用动量矩原理(moment of momentum principle),予以证明。

动量矩又称作角动量(angular momentum),它是对于某一固定点取矩的,通常是对坐标原点取矩,如对图 4.1 所示的 O 点,现对图示的物质体积 V 中的介质取矩,设其总动量矩为 $\boldsymbol{N}$,它为

$$\boldsymbol{N} = \int_V (\boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{v}) \mathrm{d}V \tag{4.27.1}$$

或写成

$$N_i = N_i(t) = \int_V \in_{ijk} x_j \rho v_k \mathrm{d}V \tag{4.27.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 即 $\boldsymbol{r}$ 为体元 $\mathrm{d}V$ 的位置矢量。

作用在 V 中诸体力对 O 点所产生的力矩 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和作用在 V 表面 S 上的诸面力对 O 点所产生的力矩 $\boldsymbol{\Gamma}^*$ 分别为

$$\boldsymbol{\Gamma} = \int_V \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{b} \mathrm{d}V \quad \text{或} \quad \Gamma_i = \int_V \in_{ijk} x_j \rho b_k \mathrm{d}V \tag{4.28}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}^* = \oint_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}^{(\hat{n})} \mathrm{d}\zeta \quad \text{或} \quad \Gamma_i^* = \oint_S \in_{ijk} x_j t_k^{(\hat{n})} \tag{4.29}$$

根据动量矩原理，则有

$$\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t}=\Gamma+\Gamma^{*} \tag{4.30}$$

上式成立的条件是：在 V 内的介质中不存在分布力矩(distributed moment)，而 V 内质点间的力，即内力(internal force)，都是大小相等，方向相反且共线(collinear)。如果在介质中存在分布力矩，则在(4.30)式中还要加另外一项力矩 ξ

根据(4.15)式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t}&=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V \boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V=\int_V\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\mathrm{d}V\\&=\int_V\rho\left[\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}{\mathrm{D}t}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}\times\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\right]\mathrm{d}V\\&=\int_V\rho\boldsymbol{x}\times\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{4.31}$$

根据应力矢量与应力张量的关系(2.19)式

$$\boldsymbol{t}^{(\hat{n})}=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\Sigma} \tag{4.32}$$

利用上式和高斯定理，(4.29)式可写成

$$\begin{aligned}\Gamma^{*}&=\oint_S\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}^{(\hat{n})}\mathrm{d}S=\oint_S\boldsymbol{x}\times(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\Sigma})\mathrm{d}S\\&=-\oint_S(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\Sigma})\times\boldsymbol{x}\mathrm{d}S=-\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{x})\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{4.33}$$

式中的被积函数，在直角坐标系中可化成

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{x})&=\frac{\partial}{\partial x_p}\{\hat{e}_p\cdot(\sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j\times x_k\hat{e}_k)\}\\&=\frac{\partial}{\partial x_p}(\hat{e}_p\cdot\sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j\times x_k\hat{e}_k)\\&=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}\hat{e}_j\times x_k\hat{e}_k+\sigma_{ij}\hat{e}_j\times\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\hat{e}_k\\&=(\nabla\cdot\boldsymbol{\Sigma})\times\boldsymbol{x}-\in_{ijk}\sigma_{ij}\hat{e}_k\end{aligned} \tag{4.34}$$

将(4.34)式代进(4.33)式中，则给出

$$\Gamma^{*}=\int_V[\boldsymbol{x}\times(\nabla\cdot\boldsymbol{\Sigma})+(\in_{ijk}\sigma_{ij}\hat{e}_k]\mathrm{d}V \tag{4.35}$$

将(4.28)、(4.31)、(4.35)式代进(4.30)式中给出

$$\int_V\boldsymbol{x}\times\left(\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}-\nabla\cdot\boldsymbol{\Sigma}-\rho\boldsymbol{b}\right)\mathrm{d}V=\int_V\in_{kij}\sigma_{ij}\hat{e}_k\mathrm{d}V \tag{4.36}$$

利用(4.24.1)式，则由上式推出

$$0=\int_V\in_{kij}\sigma_{ij}\hat{e}_k\mathrm{d}V=\int_V\Sigma_v\mathrm{d}V \tag{4.37}$$

由于体积 V 是任取的，因此被积函数必为零，即

$$\Sigma_v=0\qquad\text{或}\qquad\in_{kij}\sigma_{ij}=0 \tag{4.38}$$

上式中 Σ_v 是应力张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的矢量(关于张量的矢量定义，见(1.15)式)。由此推出应力张量是对称的，即有

$$\Sigma = \Sigma_C \quad 或 \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{4.39}$$

在此再一次指出:推出应力张量对称的条件是:在所考虑的介质中不存在分布力矩。如果存在分布力矩,则在(4.30)式中多一项ξ,即为

$$\frac{DN}{\partial t} = \Gamma + \Gamma^* + \xi \tag{4.40}$$

于是利用(4.28)、(4.31)和(4.35)式可以推出

$$\int_V \in_{kij} \sigma_{ij} \hat{e}_k = -\xi \neq 0 \tag{4.41}$$

由上式当然推不出 $\Sigma_v = 0$,由于 $\Sigma_v \neq 0$,当然就得不出 $\Sigma = \Sigma_c$,从而出现了应力张量的不对称性。

4.4 能量守恒、热力学第一定律、能量方程

作为自然界的普遍规律之一的能量守恒(conservation of energy),当然也适于连续介质力学。亦即连续介质力学也应遵守能量守恒定律。然而能量方程的具体形式要根据具体情况而定。

4.4.1 只考虑力学过程的情况下

如果只考虑力学的量,即所研究的为"纯力学"过程,如对图 4.1 所示的情形。对于这种情况能量守恒规律表述为:介质的动能加内能的随时间的变化率(time rates of change of kinetic energy plus internal energy)等于外力的功率(rates of work done by external forces),这可从介质的运动方程直接推出。

将(4.24)式两边点乘以 $\boldsymbol{v}$,给出

$$\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} \cdot \boldsymbol{v} = (\nabla \cdot \Sigma) \cdot \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} \tag{4.42.1}$$

它在直角坐标系中按指标写法,表成

$$\rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} = v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i v_i \tag{4.42.2}$$

将上式在图 4.1 所示的介质体积 V 上积分,给出

$$\int_V \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} dV = \int_V v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho b_i v_i dV \tag{4.43}$$

而 V 中介质的动能 K 为

$$K = \int_V \rho \frac{v^2}{2} dv = \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV$$

动能的随时间的变化率为

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \int_V \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} dV \tag{4.44}$$

对(4.43)式右边第一项中的被积函数,可改写如下

$$v_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i \sigma_{ji}) - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} \tag{4.45}$$

利用(3.47)式,上式右边第二项可以写成

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\sigma_{ji} = (B_{ij} + Z_{ij})\sigma_{ji} = B_{ij}\sigma_{ji} \tag{4.46}$$

利用(4.45)和(4.46)式，式(4.43)中右边的第一项可以写成

$$\begin{aligned}\int_V v_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\mathrm{d}V &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i\sigma_{ji})\mathrm{d}V - \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\sigma_{ji}\mathrm{d}V \\ &= \oint_S n_j v_i \sigma_{ji}\mathrm{d}S - \int_V B_{ij}\sigma_{ji}\mathrm{d}V \\ &= \oint_S v_i t_i^{(n)}\mathrm{d}S - \int_V B_{ij}\sigma_{ji}\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{4.47}$$

将上式和(4.44)式代进(4.43)式中给出

$$\frac{\mathrm{D}K}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t} = \frac{\delta W}{\mathrm{D}t} \tag{4.48}$$

上式就是纯力学过程的能量守恒方程。其中 U 为总内能、W 为功，具体地

$$\frac{\delta W}{\mathrm{D}t} = \oint_S v_i t_i^{(n)}\mathrm{d}S + \int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V \tag{4.49}$$

它为作用在 V 上的面力和体力的功率，其实在该式中的 δW 即 $\mathrm{D}W$ 并不是精确的微分，因功 W 与路径有关。而在(48)式中另一项

$$\frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t} = \int_V B_{ij}\sigma_{ji}\mathrm{d}V \tag{4.50}$$

它为作用在 V 中机械内能(internal mechanical energy)随时间的变化率。

4.4.2 在非全力学过程的情况下

在非纯力学过程的条件下，即不但考虑机械能，而且要考虑非机械能。这时必须对所考虑的介质使用最普遍形式的能量守恒原理，它表述为：动能加内能的随时间变化等于外力功率加上单位时间内供给介质(或从介质中放出)的所有的其他能量之和。这里所讲的其他能量是指热能(thermal energy)、化学能(chemical energy)、或电磁能(electromagnetic energy)等。

如果在这个非全力学过程中，只考虑机械能和热能、即不考虑化学能和电磁能等，则其能量守恒原理为大家熟知的"热力学第一定律(first law of thermodynamics)，即热力学第一定律是一种狭义(narrow sence)的能量守恒形式。

对于热力学第一定律适用的连续介质称作热力学介质或热力学连续介质(thermomechanical continuum)，对于这种介质的内能变化率习惯地表成如下积分形式

$$\frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_V \rho e \mathrm{d}V = \int_V \rho \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V = \int_V \rho \dot{e}\, \mathrm{d}V \tag{4.51}$$

其中 e 称作比内能(specific internal energy)。

如下只考虑热力学连续介质。对于这种介质的供热 $Q^{(e)}$ 来自热传导和热辐射(heat conduction and heat radiation)。令 α 为单位时间单位面积上的热流矢量(vector of heat flux)、g 为单位时间单位质量所得的辐射热量，于是所考虑的那部分介质单位时所得到的总热量 $\frac{\delta Q^{(e)}}{\mathrm{D}t}$ 表成

$$\frac{\delta Q^{(e)}}{\mathrm{D}t} = -\oint_S \alpha_i n_i \mathrm{d}S + \int_V \rho g \mathrm{d}V = -\oint_S \alpha_i n_i \mathrm{d}S + \int_V \rho g \mathrm{d}V \tag{4.52}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为 $\mathrm{d}S$ 面的单位外法线矢量，而对热流量规定流进为正、流出为负，故在上式中加上负号，按傅立叶定律(Fourier's law)，有

$$\alpha = \alpha_i e_i = -\lambda \mathrm{grad} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} e_i \tag{4.53}$$

其中 T 为温度(temperature)，λ 为热传导常数(heat conductive constant). 同(4.49)式的 δW 一样，式(4.52)中的 $\delta Q^{(e)}$，即 $\mathrm{D}Q^{(e)}$，也不是精确的微分。

热力学连续介质的能量守恒，数学上表示为

$$\frac{\mathrm{D}K}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t} = \frac{\delta W}{\mathrm{D}t} + \frac{\delta Q^{(e)}}{\mathrm{D}t} \tag{4.54}$$

根据(4.44)、(4.49)和(4.52)式，上式可以表成具体的能量积分形式

$$\int_V \rho v_i \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V + \int_V \rho \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V = \oint_S v_i t_i^{(n)}\mathrm{d}S + \int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V + \int_V \rho g \mathrm{d}V - \oint_S \alpha_i n_i \mathrm{d}S \tag{4.55}$$

将上式中的面积分化成体积分，之后再考虑到 V 是任取的从而推出被积函数满足

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{v^2}{2} + e\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i\sigma_{ij}) + v_i b_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} + g \tag{4.56.1}$$

或写成

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{v^2}{2} + e\right) = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha} + g \tag{4.56.2}$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i\sigma_{ij}) = v_i\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\sigma_{ij} = v_i\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_{ij}\sigma_{ij} \tag{4.57}$$

利用上式和(4.42.2)式，则由(4.56)式推出

$$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho}B_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} + g \tag{4.58.1}$$

或写成

$$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho}\mathbf{B}:\boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{\alpha} + g \tag{4.58.2}$$

这就是极为有用的热力学介质的微分形式的能量守恒方程，又称作局部能量方程(local energy equation)。该式表明：内能随时间的变化率等于应力功率(stress power)加上供给介质的热量

4.5 状态方程、热力学第二定律、熵

4.5.1 状态参量和状态方程的概念

作为运动变形的连续介质亦即作为一个热力学系统，它在任何瞬间任何部位的状态都可用一些确定的物理量来描述，这些物理量从广义上讲均称作**状态参量或变量**(state parameters or state variables)，它们分为运动学量和热力学量(kinematic quantities and thermodynamic quantities)，这些量随时间的变化则描述了系统的热力学过程

实际上，状态参量之间并不完全独立(independent)，有许多量之间存在着一定的函数

关系，表征这种函数关系的关系式就称作状态方程或物态方程(equantion of state)；而将一个状态量表作其他一些参量的单值函数(single-valued function)，这个函数就称作状态函数(state function)。

然而，通常所说的状态参量是指热力学参量，如温度 T 压力 p 和比容 V_* 等，而排出运动学参量(例如速度、位移等等)。状态方程亦是指热力学参量之间所满足的关系式。以下研究的状态方程就是这种狭义的状态方程，这种状态方程有多种形式，如压力型：$p=p(V_*,T)$，其中 p 为压强(pressure，按流体力学的习惯称为压力)、内能型 $e=e(V_*,T)$ 等等，e 为比内能。但一般只把 $p=p(V_*,T)$ 称作状态方程。

作为通常所用的热力学参量之间的状态方程，它适用的条件是：介质均匀且处于热力学平衡(thermodynamical equilibrium)。然而在连续介质中所研究的对象却是随时和地点都在变化，即介质既不均匀又瞬息万变"不平衡"，似乎状态方程不能用。其实上不然，因在连续介质力学中使用的是"局部迅速热动平衡的概念"(concept of local, rapid and thermodynamical equilibrium)，故状态方程在我们所考虑的时空点上照样适用。这是由于在连续介质力学中所研究的点为一个质点即质团，它在宏观上是"极小"可以作为一个"几何点。所以可以视介质在局部是均匀的；另一方面在连介中考虑问题的时间出发点是"宏观短、微观长"，在宏观上所认为的"一瞬间"，在微观上仍然是大量分子在"充分长的时间"内的行为，故可认为在一个质团的范围内介质达到了热力学平衡。

关于状态方程的某些具体形式将在 4.8 节及以后各章中论述。

4.5.2 热力学第二定律

在上一节，热力学第一定律给出了力学能(即机械能)与热能相互转变的关系，如能量守恒方程(4.55)和(4.58)式。但是，热力学第一定律却不能回答能量的这种转化是"可逆还是不可逆"(reversible or irreversible)。自然界所有的实际过程都是不可逆的，然而可逆过程又是对许多实际过程近似成立的极为有用的情形，那么如何判断一个过程是作为可逆还是不可逆？这就要依靠热力学第二定律(second law of thermodynamics)。

现在引出热力学第二定律。它有多种表述方法，其中之一的表达为：对于任一指定的不可逆过程(例如有热传导和摩擦等)，所产生的热效果，无论利用什么方法也不能完全恢复原状而不引起其他变化；表述方法之二：不可能使热量从低温物体(介质)传到高温物体(介质)而不引起其他变化。

设一体积为 V 的系统(介质)从一状态变化到另一邻近状态时，与外界交换的热量为 $\delta Q^{(e)}$、该系统内部生成的热量为 $\delta Q^{(i)}$，设该系统所增加的总热量为 δQ，即有

$$\delta Q=\delta Q^{(e)}+\delta Q^{(i)} \tag{4.59}$$

设 δq、$\delta q^{(e)}$、$\delta q^{(i)}$ 为单位质量介质在所考虑的时间内所增加的热量，从而有

$$\begin{cases}\delta Q=\int_V \rho\delta q\mathrm{d}V\\ \delta Q^{(e)}=\int_V \rho\delta q^{(e)}\mathrm{d}V\\ Q^{(i)}=\int_V \rho\delta q^{(i)}\mathrm{d}V\end{cases} \tag{4.60}$$

于是由式(4.59)和(4.60)推出

$$\delta q = \delta q^{(e)} + \delta q^{(i)} \tag{4.61}$$

热力学第二定律用于判断具体过程是否可逆，主要依靠两个状态量：绝对温度(absolute temperature)T 和比熵(specific entropy)$S_{\bullet}$，其中 $S_{\bullet}$ 又称作熵密度(entropy density)，熵是个广延量(extensive equantity)，故总熵 L 为

$$L = \int_V \rho S_{\bullet} \mathrm{d}V \tag{4.62}$$

比熵的定义为

$$\mathrm{d}S_{\bullet} = \frac{\delta q}{T} \tag{4.63.1}$$

从而有

$$\mathrm{d}S_{\bullet}^{(e)} = \frac{\delta q^{(e)}}{T}, \quad \mathrm{d}S_{\bullet}^{(i)} = \frac{\delta q^{(i)}}{T} \tag{4.63.2}$$

根据(4.63)式和(4.61)式，则有

$$\mathrm{d}S_{\bullet} = \mathrm{d}S_{\bullet}^{(e)} + \mathrm{d}S_{\bullet}^{(i)} \quad \text{或写成} \quad \mathrm{D}S_{\bullet} = \mathrm{D}S_{\bullet}^{(e)} + \mathrm{D}S_{\bullet}^{(i)} \tag{4.64}$$

①. 对于可逆过程，内部无生成热，即 $\delta Q^{(i)} = \delta q^{(i)} = 0$，从而有

$$\mathrm{d}S_{\bullet}^{(i)} = \mathrm{D}S_{\bullet}^{(i)} = 0 \tag{4.65}$$

$$\mathrm{d}S_{\bullet} = \mathrm{D}S_{\bullet} = \frac{\delta q}{T} = \frac{\delta q^{(e)}}{T} = \mathrm{d}S_{\bullet}^{(e)} = \mathrm{D}S_{\bullet}^{(e)} \tag{4.66}$$

②. 对于不可逆过程，$\delta Q^{(i)} > 0$，$\delta q^{(i)} > 0$，从而有

$$\mathrm{d}S_{\bullet}^{(i)} = \mathrm{D}S_{\bullet}^{(i)} > 0 \tag{4.67}$$

$$\mathrm{d}S_{\bullet} = \mathrm{D}S_{\bullet} > \frac{\delta q^{(e)}}{T} = \mathrm{d}S_{\bullet}^{(e)} = \mathrm{D}S_{\bullet}^{(e)} \tag{4.68}$$

③. 总之，对于任何系统总有下式成立

$$\mathrm{d}S_{\bullet}^{(i)} = \mathrm{D}S_{\bullet}^{(i)} \geqslant 0 \quad , \quad \mathrm{d}S_{\bullet} = \mathrm{D}S_{\bullet} \geqslant \frac{\delta q^{(e)}}{T} \tag{4.69}$$

这就是热力学第二定律的数学表示(mathematical representation)。

对于一个孤立系统(isolated system)，则有

$$\delta Q^{(e)} = \delta q^{(e)} = 0$$

于是由(4.64)和(4.69)式推出熵增原理，即对于孤立系统熵永不减少，即有

$$\mathrm{d}S_{\bullet} = \mathrm{D}S_{\bullet} \geqslant 0 \tag{4.70}$$

4.6 熵不等式、热力学第一定律的常见形式

4.6.1 熵不等式

根据热力学第二定律，有人提出一个熵不等式，即克劳修斯—达黑姆不等式(Clausius-Duhem inequality)，其积分形式为

$$\frac{\mathrm{D}L}{\mathrm{D}t} = \int_V \rho \frac{\mathrm{D}S_{\bullet}}{\mathrm{D}t} \mathrm{d}V \geqslant \int_V \rho \frac{g}{T} \mathrm{d}V - \oint_S \frac{\alpha_i n_i}{T} \mathrm{d}S \tag{4.71}$$

上式等号对于可逆过程，大于号对于不可逆过程。利用高斯定理并考虑到 V 是任取的，可

以得到微分形式的熵不等式

$$\eta = \rho \frac{\mathrm{D}S_*}{\mathrm{D}t} - \frac{\rho g}{T} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\alpha_i}{T}\right) \geqslant 0 \tag{4.72}$$

其中 η 称作**内熵生成率**(internal entropy production rate)。

对于孤立系统,即绝热过程($g=0$,$\alpha_i=0$),则有

$$\eta = \rho \frac{\mathrm{D}S_*}{\mathrm{D}t} = \rho \dot{S}_* \geqslant 0 \quad 即 \quad \dot{S}_* \geqslant 0 \tag{4.73}$$

上式取等号,即 $\dot{S}_*=0$,对应于绝热可逆过程;$\dot{S}_*>0$ 对应于绝热不可逆过程。

4.6.2 热力学力学第一定律的常见形式

利用状态量 S_*,可以给出热力学介质的能量方程更常见形式。

根据(4.60)式和(4.52)式,可推出

$$\frac{\delta q^{(e)}}{\mathrm{D}t} = g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} \tag{4.74}$$

将上式代进热力学介质的能量方程(4.58)中,则给出

$$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho} B_{ij}\sigma_{ij} + \frac{\delta q^{(e)}}{\mathrm{D}t} \tag{4.75}$$

根据统计力学(Statistical Mechanics)理论,可将应力张量分成两部分,亦即(参照 2.10 节)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(C)} + \sigma_{ij}^{(D)} \quad 或 \quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{(C)} + \boldsymbol{\Sigma}^{(D)} \tag{4.76}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}^{(C)}$ 为保守应力张量(conservative stress tensor),$\boldsymbol{\Sigma}^{(D)}$ 为耗散应力张量(dissipative stress tensor),将上式代进(4.75)式中,给出

$$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(C)} B_{ij} + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(D)} B_{ij} + \frac{\delta q^{(e)}}{\mathrm{D}t} \tag{4.77}$$

1. 对于过程是可逆的情形

如果过程是可逆的,则耗散应力为零,再据(4.66)式,则得到

$$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(C)} B_{ij} + T\frac{\mathrm{D}S_*}{\mathrm{D}t} \tag{4.78}$$

在气体动力学(Gas Dynamics)中经常碰到这种情况,这时

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(C)} = \sigma_{ij}^{(C)}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j = -p\delta_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j \tag{4.79}$$

利用上式可把式(4.78)中的 $\sigma_{ij}^{(C)}B_{ij}$ 化成

$$\sigma_{ij}^{(C)}B_{ij} = -p\sigma_{ij}B_{ij} = -pB_{ii} \tag{4.80}$$

据(3.48)和(4.4)式,则有

$$B_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\dot{\rho} = \frac{1}{V_*}\dot{V}_* \tag{4.81}$$

将(4.80)、(4.81)式代进(4.78)式中,则给出

$$T\frac{\mathrm{D}S_*}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} + p\frac{\mathrm{D}V_*}{\mathrm{D}t} \tag{4.82}$$

或者写成

$$T\mathrm{D}S_* = \mathrm{D}e + p\mathrm{D}V_* \tag{4.83}$$

亦即

$$TdS_* = de + pdV_*. \tag{4.84}$$

在如上诸式中 $V_* = 1/\rho$. 式(4.84)就是在气体动力学中常见之能量方程的一种形式,即常见的热力学第一定律的一种形式。

2. 对于不可逆过程

从式(4.77)可知在不可逆过程中,系统内所产生的热当然是 $\sigma_{ij}^{(D)}B_{ij}$ 造成的,即有

$$\frac{\delta q^{(i)}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}^{(D)}B_{ij} \tag{4.85}$$

于是由(4.63)和(4.64)式推出

$$\frac{DS_*}{Dt} = \frac{1}{T}\frac{\delta q^{(e)}}{Dt} + \frac{1}{\rho T}\sigma_{ij}^{(D)}B_{ij} \tag{4.86}$$

在上式中标量 $\sigma_{ij}^{(D)}B_{ij}$ 称作为:耗散函数(dissipation function)。

①若过程不但不可逆而且绝热,即有

$$\delta q^{(e)} = 0 \quad , \quad \frac{DS_*}{Dt} > 0$$

于是从(4.86)式推出(同时考虑到 ρ 和 T 为正的)

$$\sigma_{ij}^{(D)}B_{ij} = \rho T\frac{DS_*}{Dt} > 0 \tag{4.87}$$

上式表明耗散函数是正定的(positive definite)。

②对于一般的不可逆过程,在(4.80)式仍然成立的条件下,再据(4.86)式,则由(4.77)式推出同可逆过程完全一样形式的能量方程(见(4.84)式),即

$$\delta q = TdS_* = de + pdV_*. \tag{4.88}$$

从而说明,不管过程是否可逆总有上式成立。

4.6.3 比热

在此介绍在热力学中常用的两种比热(specific heat)。比热 C_* 是单位质量介质其温度每升高一度所吸收的热量:

$$C_* = \lim_{\Delta T\to 0}\frac{\delta q}{\Delta T} \tag{4.89}$$

比热 C_* 的数值与过程的条件有关,最重要的过程是等容过程和定压过程,所以定义了针对这两种过程的比热。

定容比热(specific heat at constant volume),即在密度不变情况下的比热,记作 C_V,它定义为

$$C_V = \lim_{\Delta T\to 0}\left(\frac{\delta q}{\Delta T}\right)_\rho = \lim_{\Delta T\to 0}\left(\frac{\delta q}{\Delta T}\right)_{V_*} \tag{4.90.1}$$

根据(4.88)式,当体积不变时,则有

$$\delta q = de$$

于是有

$$C_V = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_{V_*} \tag{4.90.2}$$

定压比热(specific heat at constant pressure),即在压力不变的情况下的比热,记作

C_p，它定义作

$$C_p = \lim_{\Delta T \to 0} \left(\frac{\delta q}{\Delta T} \right)_p \tag{4.91}$$

利用(4.88)式，C_p 可以表成

$$C_p = \lim_{\Delta T \to 0} \left(\frac{\Delta e + p \Delta V_{\bullet}}{\Delta T} \right) = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial V_{\bullet}}{\partial T} \right)_p \tag{4.92}$$

4.6.4 焓

现引进一个热力学函数——焓(enthalpy)，定义作

$$i = e + pV_{\bullet} \tag{4.93}$$

利用焓，可以推出

$$C_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p \tag{4.94}$$

4.7 自由能、内能和熵的表达式

4.7.1 自由能与麦克斯韦热力学关系式

现引进亥姆霍兹自由能(Helmholtz free energy) f 和吉布斯函数(Gibbs function) G，它们分别定义如下

$$f = e - TS_{\bullet} \tag{4.95}$$

$$G = i - TS_{\bullet} \tag{4.96}$$

根据(4.88)式，可以推出如下四个对称关系式

$$\mathrm{d}e = T\mathrm{d}S_{\bullet} - p\mathrm{d}V_{\bullet} \tag{4.97}$$

$$\mathrm{d}i = \mathrm{d}e + p\mathrm{d}V_{\bullet} + V_{\bullet}\mathrm{d}p = T\mathrm{d}S_{\bullet} + V_{\bullet}\mathrm{d}p \tag{4.98}$$

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}e - T\mathrm{d}S_{\bullet} - S_{\bullet}\mathrm{d}T = -S_{\bullet}\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V_{\bullet} \tag{4.99}$$

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}i - T\mathrm{d}S_{\bullet} - S_{\bullet}\mathrm{d}T = -S_{\bullet}\mathrm{d}T + V_{\bullet}\mathrm{d}p \tag{4.100}$$

式(4.97)表明，在等容的过程中单位质量获得的热量 $\delta q = T\mathrm{d}S_{\bullet}$ 等于内能的增量 $\mathrm{d}e$；式(4.98)表明在等压的过程中 δq 等于焓的增加量 $\mathrm{d}i$；式(4.99)表明在等温过程中对外界所做的功等于自由能的减少。

从以上四个式子可以推出

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial e}{\partial V_{\bullet}} \right)_{S_{\bullet}} = -p, \quad \left(\frac{\partial e}{\partial S_{\bullet}} \right)_{V_{\bullet}} = T, \quad \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_{S_{\bullet}} = V_{\bullet}, \quad \left(\frac{\partial i}{\partial S_{\bullet}} \right)_p = T \\ \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{V_{\bullet}} = -S_{\bullet}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial V_{\bullet}} \right)_T = -p, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = -S_{\bullet}, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T = V_{\bullet} \end{cases} \tag{4.101}$$

将如上的 e 的偏导数的第一个对 $S_{\bullet}$ 微分；其另一个对 $V_{\bullet}$ 微分，则得到

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S_{\bullet}} \right)_{V_{\bullet}} = -\left(\frac{\partial T}{\partial V_{\bullet}} \right)_{S_{\bullet}} \tag{4.102}$$

同理，可从(4.101)式求得

$$\left(\frac{\partial V_{\bullet}}{\partial S_{\bullet}} \right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{S_{\bullet}} \tag{4.103}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V_*} = \left(\frac{\partial S_*}{\partial V_*}\right)_T \tag{4.104}$$

$$\left(\frac{\partial V_*}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S_*}{\partial p}\right)_T \tag{4.105}$$

式(4.102)～(4.105)就是麦克斯韦热力学关系式(Maxwell thermodynamic relations)。

4.7.2 内能和熵的表达式

取T和V_*作为独立变量。从热力学得知，对于均匀系统之热力学性质，由三个热力学函数可以完全确定。这三个基本热力学函数就是如下的三种形式的状态方程，即：压力型状态方程、内能型状态方程和熵型状态方程：

$$p = p(T,V_*),\quad e = e(T,V_*),\quad S_* = S_*(T,V_*) \tag{4.106}$$

注意，按照习惯，只把如上第一式称作状态方程、第二式称作内能方程、第三式称作熵方程。

式(4.106)所示的三个函数(方程)可以结合实验来确定。例如通过实验测得$p=p(T,V_*)$、$C_V=C_V(T,V_*)$的关系，然后，再根据热力学第一定律等将内能e和熵S_*用$p(T,V_*)$和$C_V(T,V_*)$表示出来。这样就可根据实验数据(experimental data)通过必要的计算，求得一个均匀系统的内能和熵。

根据式(4.88)和麦克斯韦关系式可以推出

$$T\left(\frac{\partial S_*}{\partial T}\right)_{V_*} = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_{V_*} = C_V \tag{4.107}$$

$$T\left(\frac{\partial S_*}{\partial V_*}\right)_T = \left(\frac{\partial e}{\partial V_*}\right)_T + p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V_*} \tag{4.108}$$

从而有

$$\begin{aligned} de &= \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_{V_*} dT + \left(\frac{\partial e}{\partial V_*}\right)_T dV_* \\ &= C_V dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V_*} - p\right] dV_* \end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\begin{aligned} dS_* &= \left(\frac{\partial S_*}{\partial T}\right)_{V_*} dT + \left(\frac{\partial S_*}{\partial V_*}\right)_T dV_* \\ &= \frac{C_V}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V_*} dV_* \end{aligned} \tag{4.110}$$

由此可以给出内能和熵的表达式为

$$e = e(T,V_*) = \int_{T^{(0)},V_*^{(0)}}^{T,V_*} C_V dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V_*} - p\right] dV_* \tag{4.111}$$

$$S_* = S_*(T,V_*) = \int_{T^{(0)},V_*^{(0)}}^{T,V_*} \frac{C_V}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V_*} dV_* \tag{4.112}$$

在上式中$T^{(0)}$、$V_*^{(0)}$为积分的初态。

如下求$C_p=C_p(T,V_*)$的具体表达式。据(4.92)式，则有

$$C_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V_*}{\partial T}\right)_p$$

$$= \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_{V_*} + \left(\frac{\partial e}{\partial V_*}\right)_T\left(\frac{\partial V_*}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V_*}{\partial T}\right)_p$$

$$= \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_{V_*} + \left[\left(\frac{\partial e}{\partial V_*}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V_*}{\partial T}\right)_p$$

根据(4.90)和(4.108)式，则由上式推出

$$C_p = C_V + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V_*}\left(\frac{\partial V_*}{\partial T}\right)_p \tag{4.113}$$

在 $C_V=C_V(T,V_*)$、$p=p(T,V_*)$、$V_*=V_*(T,p)$ 的函数关系式已知的情况下，将它们代入上式便求得 $C_p=C_p(T,V_*)$ 的函数来。

在求得 C_V 和 p 作为 T 和 V_* 的函数后，则可利用式(4.111)、(4.112)、(4.93)、(4.95)、(4.96)和(4.113)给出 e、S_*、i、F、G 和 C_p 作为 T,V_* 的函数来。

函数 $C_V=C_V(T,V_*)$ 与 $p=p(T,V_*)$ 相互不独立，据式(4.103)和(4.107)，则有

$$\left(\frac{\partial S_*}{\partial V_*}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V_*}, \quad \left(\frac{\partial S_*}{\partial T}\right)_{V_*} = \frac{C_V}{T}$$

对如上第一式求 $\partial/\partial T$，第二式求 $\partial/\partial V_*$，则推出

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V_*}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_{V_*} \tag{4.114.1}$$

将上式积分，则给

$$C_V = C_V^{(0)} + T\int_{V_*^{(0)}}^{V_*}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_{V_*} dV_* \tag{4.114.2}$$

上式的积分是在 T 保持不变情况下进行的。由该式看出只要在某个 $V_*^{(0)}$ 的条件下测得 $C_V^{(0)}$，就可在 $p=p(T,V_*)$ 已知的情况下，求得 C_V，从而说明 C_V 与 p 之间不独立。事实上，只要 C_V 及 p 已知，即可完全确定 e 和 S_*.

4.8 具体状态方程实例

不同介质其状态方程是不同的，即使同一介质在不同的温度、压力和加载条件下其状态方程也是不同的。为了使读者了解和认识状态方程的多样性，下面举一些例子。

4.8.1 关于固体状态方程

对于固体，如下方程便是诸多方程中的一个，它为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho^{(0)}}[1 + \alpha T + \beta P] \tag{4.115}$$

式中 $\rho^{(0)}$ 为 $T=0$、$p=0$ 时的密度，α 和 β 为常数。α 称作热膨胀系数(coefficient of thermal expansion)，其典型的量级为 10^{-4}/℃，而 β 称作等温压缩系数(isothermal compression coefficient)，典型的量级为 10^{-5}/大气压。(对于高压下固体状态方程，参见 12.18 节)。

4.8.2 关于气体的状态方程

对于气体，其中最简单的状态方程是对于完全气体(perfect gas)的，它为

$$p = \rho RT = R\frac{T}{V_*} \tag{4.116}$$

其中常数 R 为：

$$R = \frac{1.986}{\mu} \quad \text{Cal/g} \cdot {}^{\circ}\text{C}$$

其中 μ 为气体的摩尔质量(mol)。由式(4.116)推出

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V_*} = \frac{R}{V_*}, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_{V_*} = 0$$

于是由(4.114.1)式推出

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V_*}\right)_T = 0$$

从而有

$$C_V = C_V(T) \tag{4.117}$$

即定容比热 C_V 只与温度 T 有关，而与密度 ρ 无关；这就是焦耳(J. P. Joule) 的实验结果。

将(4.116)式代进(4.113)式中给出 C_p

$$C_p - C_V = \frac{RT}{V_*}\frac{R}{p} = R \tag{4.118}$$

将(4.116)式代进(4.111)、(4.93)和(4.112)式中便给出 e、i 和 S_* 的表达式

$$e = \int C_V \mathrm{d}T + \int\left(\frac{RT}{V_*} - p\right)\mathrm{d}V_* = \int C_V \mathrm{d}T = e(T) \tag{4.119}$$

$$i = \int C_V \mathrm{d}T + pV_* = \int C_p \mathrm{d}T = i(T) \tag{4.120}$$

$$\begin{aligned} S_* &= \int \frac{C_V}{T}\mathrm{d}T + \int \frac{R}{V_*}\mathrm{d}V_* \\ &= \int C_V \mathrm{d}\ln T + (C_p - C_V)\ln V_* \end{aligned} \tag{4.121}$$

从(4.119)和(4.120)式看出，对于完全气体内能与焓只依赖温度 T，而与 V_* 无关。

根据分子运动论(kinetic (molecular) theory)，在振动(vibration)态未被激发(non excited state)之前，对于双原子分子而言

$$C_p = \frac{7}{2}R$$

空气是 O_2 和 N_2 的混合物，对于它 C_p/R 不为常数而随温度变化，例如

当 T 从：300K → 1000K 时，C_p/R 从：3.506 → 3.979

然而在温度不太高时，C_p 和 C_V 近似地视作常数。—这正是在一般气体动力学中所做的假设，即

$$C_V = \text{const}, \ C_p = \text{const} \tag{4.122}$$

在此情况下，从(4.119)和(4.120)式推出

$$e = C_V T \quad , \quad i = C_p T \tag{4.123}$$

从(4.121)式推出

$$\begin{aligned} S_* &= C_V \ln T + R\ln V_* + \text{const} \\ &= C_V \ln(TV_*^{k-1}) + \text{const} = C_V \ln\frac{T}{\rho^{k-1}} + \text{const} \end{aligned}$$

$$= C_V \ln \frac{p}{\rho^k} + \text{const} \tag{4.124}$$

其中 k 称作绝热指数(adiabatic exponent)或多方指数(polytropical exponent)，它定义作

$$k = \frac{C_p}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} \tag{4.125}$$

式(4.124)就是在气体动力学中常用的熵表达式。

在一般的情况下，气体都可近似看作完全气体。但当压力很高或密度很大时，则应改用其他状态方程(详在以后论述)，其中之一：如范德瓦耳斯方程(Van der waal's equation)，它为

$$(p + a\rho^2)\left(\frac{1}{\rho} - b\right) = RT \tag{4.126}$$

其中 a、b 为常数。当 $a=b=0$ 时，该方程就化成完全气体的状态方程(4.116)

4.8.3　关于液体的状态方程

对于液体，在一般情况下，液体的密度或体积均不随压力和温度变化，即为常数

$$\rho = \text{const} \tag{4.127}$$

于是：$C_p = C_V = C_* = \text{const}$(实际上，对于水在 15℃ 时 $(C_p - C_V)/C_p = 0.003$)，以及

$$T\mathrm{d}S_* = \mathrm{d}e = \delta q = C_* \mathrm{d}T$$

即内能和熵完全由温度(亦即由输入的热量)决定，因为在这种情况下，由于体积不变，压力不再做功。

对于在深水中，有时采用寇勒公式(Cole's formula)，它为

$$\frac{p + \eta}{1 + \eta} = \left(\frac{\rho}{\rho^{(0)}}\right)^n \tag{4.128}$$

其中 $\rho^{(0)}$ 为一个大气压下水的密度，$n \approx 7$，$\eta \approx 3000$ 大气压(atmosphere)。

如果流体质点在运动过程中，它的密度只与压力有关，而与其他热力学变量(如温度、湿度、盐度等)无关，这样的流体称作**正压流体**(barotropic fluid)，否则称为**斜压流体**(baroclinic fluid)。



4.9　间断面理论

在连续介质中所谓间断面(surface of discontinuity)，实际上是一个薄层区域，在此区域中物理变化过程(即物理量的变化)要比薄层之外的变化剧烈复杂得多。但鉴于该区域很窄，作为宏观处理，我们不考虑薄层内部的情况，只考虑穿过薄层其物理量总的变化多少，而把这个薄层视作物理量发生间断的一个曲面。

4.9.1　间断面的移动速度和传播速度

间断面随着时间的推移，它要不断地变换形状、改变位置，设该曲面的方程为

$$F(\boldsymbol{x}, t) = F(x_1, x_2, x_3, t) = 0$$

则推出

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial F}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t + \mathrm{grad}F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\operatorname{grad}F\cdot c=0,\quad c=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{4.129}$$

由于在上式 x 是取在曲面上，即跟随曲面运动，所以 c 是曲面速度(参看(3.24)式)。该曲面的单位法线 $\hat{n}$ 为

$$\hat{n}=\frac{\operatorname{grad}F}{|\operatorname{grad}F|}$$

于是由以上两式推出

$$N=c\cdot\hat{n}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\operatorname{grad}F|} \tag{4.130}$$

上式的 N 称为曲面的移动速度。由于在曲面上介质的法向速度 v_n 为

$$v_n=v\cdot\hat{n}$$

于是推出

$$U=N-v_n=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial t}+v_i\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)}{|\operatorname{grad}F|}=-\frac{\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t}}{|\operatorname{grad}F|} \tag{4.131}$$

在(4.131)中的 U 称作曲面的**传播速度**(propagation speed)。

如果曲面在空间固定不动，即函数 F 不含 t，亦即定常，则有

$$N=0\quad,\quad U=-v_n \tag{4.132}$$

如果曲面 $F=0$ 始终由同样一些介质质点组成(这样的面称作物质面)，则物质导数 $\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t}=0$，即此曲面相对介质不传播：

$$U\equiv 0 \tag{4.133}$$

4.9.2 在间断面上物理量的关系

把间断薄层的两个界面上的物理量分别用附标“+”和“−”来标识，用[ ]表示两个界面上的物理量之差，即物理量穿过间断面的跳跃量，如对于物理量 ϕ，其跳跃量表成

$$[\phi]=\phi_{-}-\phi_{+}$$

现来推导物理量在间断面上满足的条件。为此我们在间断面上取块如图 4.2 所示的体积，设间断薄层的厚度为 δ，视物理量在薄层区“连续”。于是可根据基本物理规律，从积分形式的方程把间断面的条件导出来。现把质量守恒，动量守恒和能量守恒三种守恒按统一形式表示出来。当把图 4.2 所示的体积视作介质体时，则有

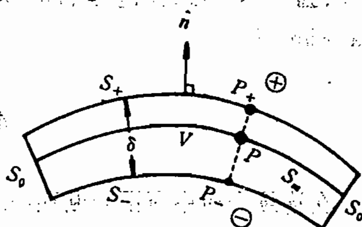


图 4.2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\Psi\mathrm{d}V=\int_V\rho\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Psi)\mathrm{d}V+\oint_S\rho v_n\Psi\mathrm{d}S$$

$$=\int_V\rho G\mathrm{d}V+\oint_S\hat{n}_{\bullet}\cdot\pi\mathrm{d}S \tag{4.134}$$

其中 V 是作为以表面 $S=S_o+S_++S_o+S_-$ 为边界的连续介质体体积，$\hat{n}_{\bullet}$ 为 $\mathrm{d}S$ 的单位外

法线，ρ 为密度。而其他的那些量取法不同，式(4.134)则表示不同的守恒情况，具体地：

$$\begin{cases}\text{当 } \Psi = 1\text{、}G = 0\text{、}\pi = 0 \text{ 时，式(4.134) 表示质量守恒。}\\ \text{当 } \Psi = \boldsymbol{v}\text{、}G = \boldsymbol{b}\text{、}\pi = \boldsymbol{\Sigma} \text{ 时，式(4.134) 表示动量守恒。}\\ \text{当 } \Psi = \dfrac{1}{2}v^2 + e\text{、}G = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v} + g\text{、}\pi = \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{v} - \alpha \text{ 时，式(4.134) 表示能量守恒。}\end{cases}$$

现考虑跟随波阵面(即随间断薄层)的物理量 $\rho\Psi$，求它的随波阵面的导数(参见(3.26)式)，该随波导数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\rho\Psi)}{\mathrm{d}t}\right|_W = \frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial t} + \boldsymbol{c}\cdot\nabla(\rho\Psi)$$

由于整个薄层均以同样的速度 $\boldsymbol{c}$ 运动，不管在薄层的 P_+ 点、P 点，还是 P_- 点其速度 $\boldsymbol{c}$ 都是一样的，即在薄层范围内 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 无关，故上式可表成

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\rho\Psi)}{\mathrm{d}t}\right|_W = \frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\Psi\boldsymbol{c})$$

将上式在图 4.2 所示的体积 V 上积分

$$\begin{aligned}\int_V \left.\frac{\mathrm{d}(\rho\Psi)}{\mathrm{d}t}\right|_W \mathrm{d}V &= \int_V \frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_V \nabla\cdot(\rho\Psi\boldsymbol{c})\mathrm{d}V\\ &= \int_V \frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial t}\mathrm{d}V + \oint_S \hat{\boldsymbol{n}}_*\cdot(\rho\Psi\boldsymbol{c})\mathrm{d}S\end{aligned}$$

将上式与(4.134)式联立起来，消去不好估计量级的 $\frac{\partial}{\partial t}$ 部分的积分项，则给出

$$\begin{aligned}\int_V \left.\frac{\mathrm{d}(\rho\Psi)}{\mathrm{d}t}\right|_W \mathrm{d}V - \int_V \rho G\mathrm{d}V &= \oint_S \hat{\boldsymbol{n}}_*\cdot\{\rho\Psi(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\pi}\}\mathrm{d}S\\ &= \int_{S_o+S_o} \hat{\boldsymbol{n}}_*\cdot\{\rho\Psi(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\pi}\}\mathrm{d}S\\ &\quad + \int_{S_+} \hat{\boldsymbol{n}}_*\cdot\{\rho\Psi(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\pi}\}\mathrm{d}S\\ &\quad + \int_{S_-} \hat{\boldsymbol{n}}_*\cdot\{\rho\Psi(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\pi}\}\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{4.135}$$

经过以上的处理，将处于间断薄层的物理量之偏导数(即对 $\frac{\partial}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 的量，这些偏导数在薄层区内可能为"无穷"，不好估计大小)之积分，化成物理量本身(除 $\left.\frac{\mathrm{d}(\rho\Psi)}{\mathrm{d}t}\right|_W$ 之外)的积分。在薄层区中任一点上的物理量本身的数值都是有限的，而随波导数 $\left.\frac{\mathrm{d}(\rho\Psi)}{\mathrm{d}t}\right|_W$ 亦是数值有限，因为固定在间断面中的任一点(即随薄层运动的点，并不是空间固定点)上的物理量随时间变化不大，故随波导数的数值有限。于是，我们可以将式(4.135)中各被积函数取中值(在被积函数之上加一杠"—"表示中值)，同时将 S_- 面上外法线换成内法线(即将该面的 $\hat{\boldsymbol{n}}_*$ 换成 $-\hat{\boldsymbol{n}}_*$)，则给出

$$\begin{aligned}\overline{\left.\frac{\mathrm{d}(\rho\Psi)}{\mathrm{d}t}\right|_W} V - \overline{\rho G}V &= \overline{\hat{\boldsymbol{n}}_*\cdot\{\rho\Psi(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\pi}\}}_L S_o\\ &\quad + \overline{\hat{\boldsymbol{n}}_*\cdot\{\rho\Psi(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\pi}\}}_R S_o + \overline{\hat{\boldsymbol{n}}_*\cdot\{\rho\Psi(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\pi}\}}S_+\end{aligned}$$

$$-\hat{n}_{*}\cdot\{\rho\Psi(c-v)+\pi\}S_{-}$$

在上式中 $S_o\sim\delta$ ， $V\sim S_m\delta$ ， $S_+\sim S_m$ ， $S_-\sim S_m$

当 $\delta\to 0$ 时 $V\to 0$ ， $\hat{n}_{*}\to\hat{n}$ ， $S_+\to S_m$ ， $S_-\to S_m$

于是给出

$$\hat{n}\cdot\{\rho\Psi(c-v)+\pi\}S_m-\hat{n}\cdot\{\rho\Psi(c-v)+\pi\}S_m=0$$

从而推出

$$[\rho\Psi U+\hat{n}\cdot\pi]=0 \tag{4.136.1}$$

或写成

$$[\rho\Psi U]+\hat{n}\cdot[\pi]=0 \tag{4.136.2}$$

其中

$$U=\hat{n}\cdot(c-v)=\hat{n}\cdot c-\hat{n}\cdot v=N-v_n \tag{4.137}$$

当 $\Psi=1,\pi=0$，则从(4.136)式推出质量守恒

$$[\rho U]=0 \tag{4.138}$$

亦即
$$\rho_-U_--\rho_+U_+=0$$

当 $\Psi=v,\pi=\Sigma$，则从(4.136)式推出动量守恒

$$[\rho Uv]+\hat{n}\cdot[\Sigma]=0 \tag{4.139}$$

亦即
$$\rho_-U_-v_--\rho_+U_+v_++\hat{n}\cdot(\Sigma_--\Sigma_+)=0$$

当 $\Psi=\frac{1}{2}v^2+e,\pi=\Sigma\cdot v-\alpha$ 时，则从(4.136)式推出能量守恒

$$\left[\rho U\left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\right]+\hat{n}\cdot[\Sigma\cdot v-\alpha]=0 \tag{4.140}$$

亦即
$$\rho_-U_-\left(\frac{1}{2}v_-^2+e_-\right)-\rho_+U_+\left(\frac{1}{2}v_+^2+e_+\right)$$
$$+\hat{n}\cdot\{(\Sigma_-\cdot v_--\alpha_-)-(\Sigma_+\cdot v_+-\alpha_+)\}=0$$

式(4.138)、(4.139)和(4.140)就是在一般连续介质问题中，间断面应满足的条件。关于 α，请看式(4.53)

习题

4.1 介质流动的速度由下式给出

$$v_i=\frac{x_i}{1+t}$$

导出密度 ρ 函数并证明

$$\rho x_1x_2x_3=\rho_0X_1X_2X_3$$

其中 ρ_0 为初始($t=0$)时密度，X 为初始坐标(即物质坐标)。

4.2 按直接展开的办法，证明恒等式

$$\in_{ijk}\sigma_{jk}\hat{e}_i=\Sigma_v$$

4.3 对于刚体绕坐标原点旋转的速度由下式给出

$$v_i=\in_{ijk}\omega_jx_k$$

证明式(4.31)可以化成：$\frac{D}{Dt}(\omega_pI_{ip})$，其中惯性张量矩之分量 I_{ip} 为

$$I_{ip} = \int_V \rho(\delta_{ip}x_q x_q - x_p x_i)\mathrm{d}V$$

4.4 对于上题的刚体旋转速度，证明(4.44)式的动能积分可以化成对于刚体中的熟知形式，即成化

$$K = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2}$$

4.5 在介质中某一点上的变形率张量 **B** 和应力张量 **Σ** 如下

$$\mathbf{B} = B_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

确定在该点的应功率 $B_{ij}\sigma_{ij}$ 的值。

4.6 如果应力张量的分量 $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$，$p$ 为一个正数。证明应力功率为

$$B_{ij}\sigma_{ij} = \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}$$

4.7 如果热传导服从傅立叶定律：$q_i = -\lambda \mathrm{grad}T$，见(4.53)式。而应力张量遵守如下规律

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda^* B_{kk})\delta_{ij} + 2\mu^* B_{ij}$$

其中 λ^* 和 μ^* 为常数。请确定能量方程的形式，

4.8 对于应力张量的不可逆部分为 $\sigma_{ij}^{(D)} = \beta B_{ik}B_{kj}$，请确定以 **B** 的不变量表示的耗散函数。

4.9 证明下式

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{2\omega_i}{\rho}\right) = \left(\in_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j} + 2\omega_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)/\rho$$

其中 ρ 是密度，a_i 为加速度分量，$\boldsymbol{\omega} = \omega_i\hat{e}_i = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{v}$.

4.10 如果有一个二维不可压($\mathrm{D}\rho/\mathrm{D}t = 0$)定常流动，其流速的一个分量 v_1 为

$$v_1 = -A\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

设 v_2 在 x_2 轴上 $v_2 \equiv 0$。请确定 v_2；同时证明该流动无旋且流线为圆。

4.11 以笛卡尔坐标表述的连续性方程如下

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

证明以柱坐标 r,θ,z 表示的连续方程如下

$$r\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta) + r\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

其中 v_r、v_θ、v_z 为速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 在柱坐标各轴向的分量。

参考文献

[1] Mase G E. Theory and Problems of Continuum Mcchanics, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1975

[2] Courant R. Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience Publishers, Inc. 1956

[3] Chou Pei Chi, Hopkins A K. Dynamic Response of Materials to Intense Impulsive Loading, printed in the United States of America, 1972

[4] 冯元桢．连续介质力学导论．北京：科学出版社，1984
[5] 吴望一．流体力学．北京：北京大学出版社，1982
[6] 杜珣．气体动力学讲义．北京：北京大学，1962
[7] 杜珣．连续介质力学引论．北京：清华大学出版社，1985
[8] Л Г. 洛强斯基．液体与气体力学．北京：人民教育出版社，1958

第五章　本构方程

5.1　控制方程组、本构概念、变形梯度

5.1.1　连续介质运动的控制方程组

根据(4.4)、(4.24)和(4.58)式以及(4.53)式与(4.72)式，给出描述热力学介质的方程组归纳如下

$$\begin{cases} \dfrac{D\rho}{Dt} + \rho \mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0 \\ \rho \dfrac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \rho \boldsymbol{b} + \mathrm{div}\boldsymbol{\Sigma} \\ \rho \dfrac{De}{Dt} = \rho g - \mathrm{div}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{\alpha} = -\lambda \mathrm{grad} T \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\frac{DS_*}{Dt} - \frac{\rho g}{T} + \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{T}\right) \geqslant 0 \tag{5.2}$$

据(3.48)式，在直角坐标系下的 B_{ij} 为

$$B_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{5.3}$$

式(5.2)是个限制性方程，一般对求解无帮助。除了该方程外，式(5.1)和(5.3)共有 14 个方程，而未知函数却有 ρ、v_i、σ_{ij}，B_{ij}，α_i，T，e 共 21 个，要使方程组封闭还要补充一个如下形式的状态方程以及一个含有六个分式子的本构方程，其状态方程为

$$e = e(V_*, T) = e\left(\frac{1}{\rho}, T\right) \tag{5.4}$$

5.1.2　本构方程的概念

本构方程亦称本构关系(constitutive equations or relations)，它是反映介质宏观性质的数学模型，即反映介质纯力学性质的关系。狭义的本构方程是指应力应变的关系式，如大家熟知的胡克定律(Hooke's law)。

不同的连续介质，或同一介质在不同的运动条件(如变形的大小、历史和温度的高低等)下，本构方程是不同的。每种介质在特定的条件下的本构方程都要依靠理论和实验共同来确定，在实验的基础上提出简化的理论模型再从理论上找出该模型下的一般形式本构关系，然后再从实验上得到验证，并确定出现的参数或者将一般形式的本构关系(通常是先给出泛函形式)具体化，即给出具体函数形式。

如何建立本构关系是理性力学(Rational Mechanics)乃至连续介质力学所要研究的主要课题之一。本构方程所遵循的一般公理或称原理(general axioms or principles)为：决定性原理、标架无关性原理、局部作用原理、短期记忆原理等。在叙述本构公理之前，先谈运动的力学历史。

5.1.3 运动与历史

构成物体 $\mathscr{B}$ 的各个质点 X 的运动由下式描述

$$x = x(X,t) \quad 或 \quad x_i = x_i(X,t) \tag{5.5}$$

上式中的 X 是质点在某个时该 t_0 的空间位置矢量。x 对 X 的一阶偏导数称作变形梯度(deformation gradient)，即

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x}{\partial X} \quad 或 \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{5.6}$$

质点的运动速度 v 为

$$v = \frac{\partial}{\partial t}x(X,t)|_X = \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}t} \quad 或 \quad v_i = \frac{\mathrm{D}x_i}{\mathrm{D}t} = \dot{x}_i \tag{5.7}$$

式(5.5)是一种变换，它逆变换存在的条件是雅可比行列式 J 不为零，J 定义作

$$J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right| = \det\mathbf{F} \tag{5.8}$$

根据质量守恒(见 4.13)式)则有

$$J = \frac{\rho_0}{\rho} \tag{5.9}$$

其中 ρ_0 为 t_0 时刻介质的密度。为了保证介质在一个有限域中永不消失或不变成无限大，以及介质在一个区域内永不翻转(质量不会变成负值)，所以 J 要满足

$$0 < J < \infty \tag{5.10}$$

式(5.5)表示了连续介质体 $\mathscr{B}$ 中的每个质点在任一时刻的位置。质点从过去到现在的运动历史现用 x^t 表示，它为

$$x^t = x(X, t - t^*), \quad 0 \leqslant t^* < \infty \tag{5.11}$$

参数 t^* 称作流逝的时间(elapsed time)。式(5.11)所描述的历史包含了所有的过去时刻，直至 $t = -\infty$ 的情况。

5.1.4 变形梯度的极分解

变形梯度 $\mathbf{F}$ 可以被唯一地分解成为一个正交张量 $\mathbf{R}$ 和一个正定的对称张量 $\mathbf{U}$(或 $\mathbf{V}$)，即有

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{R} \tag{5.12}$$

这种分解称作极分解(polar decomposition)。$\mathbf{R}$ 称作正交旋转张量(orthogonal rotation tensor)，$\mathbf{U}$ 称作右伸长张量(right stretch tensor)，$\mathbf{V}$ 称作左伸长张量(left stretch tensor)，总之 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 均表示变形伸长而无旋。转例，如一个物质线元在变形开始时为 $\mathrm{d}X$，到 t 时刻变成 $\mathrm{d}x$。根据(5.5)式，$\mathrm{d}X$ 与 $\mathrm{d}x$ 的关系为

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial X}\cdot\mathrm{d}X = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}X \tag{5.13}$$

利用(5.12)式，上式可以写成

$$\mathrm{d}x = (\mathbf{R}\cdot\mathbf{U})\cdot\mathrm{d}X = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathrm{d}X = \mathbf{R}\cdot(\mathbf{U}\cdot\mathrm{d}X) \tag{5.14.1}$$

$$\mathrm{d}x = (\mathbf{V}\cdot\mathbf{R})\cdot\mathrm{d}X = \mathbf{V}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathrm{d}X = \mathbf{V}\cdot(\mathbf{R}\cdot\mathrm{d}X) \tag{5.14.2}$$

式(5.14.1)表明，线元 $\mathrm{d}X \to \mathrm{d}x$ 的过程中，$\mathrm{d}X$ 先变形伸长，然后再将这个已伸长的线元再旋转，而(5.14.2)式表明线元先旋转，然后再伸长。

在如上的分解中规定 R 只表示旋转。如果一物质线元 $dX\rightarrow dx$ 只作刚体旋转，则应有 $\mathbf{U}=\mathbf{I}$，于是据(5.13)式则有

$$
\begin{aligned}
dx^2 = dx\cdot dx &= (\mathbf{R}\cdot\mathbf{I}\cdot dX)\cdot(\mathbf{R}\cdot\mathbf{I}\cdot dX)\\
&= (\mathbf{R}\cdot dX)\cdot(\mathbf{R}\cdot dX) = (\mathbf{R}\cdot dX)_c\cdot(\mathbf{R}\cdot dX)\\
&= dX\cdot\mathbf{R}_c\cdot\mathbf{R}\cdot dX
\end{aligned}
$$

而作为刚性旋转又应有

$$dx^2 \equiv dX^2 = dX\cdot dX$$

所以

$$\mathbf{R}_C\cdot\mathbf{R}=\mathbf{I} \tag{5.15.1}$$

即 R 是正交张量

$$\mathbf{R}_c=\mathbf{R}^{-1} \tag{5.15.2}$$

根据(5.15)式，则由(5.12)式推出

$$\mathbf{U}^2=\mathbf{F}_c\cdot\mathbf{F}\qquad\text{或}\qquad \mathbf{U}=\sqrt{\mathbf{F}_c\cdot\mathbf{F}} \tag{5.16}$$

$$\mathbf{V}^2=\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}_c\qquad\text{或}\qquad \mathbf{V}=\sqrt{\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}_c} \tag{5.17}$$

注意，F 和 R 为二点张量，U 为物质张量，V 为空间张量，即

$$
\begin{cases}
\mathbf{F}=F_{ij}\hat{e}_i\hat{\mathbf{I}}_j=\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}\hat{e}_i\hat{\mathbf{I}}_j\\
\mathbf{R}=R_{ij}\hat{e}_i\hat{\mathbf{I}}_j\\
\mathbf{U}=U_{ij}\hat{\mathbf{I}}_i\hat{\mathbf{I}}_j\\
\mathbf{V}=V_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j
\end{cases} \tag{5.18}
$$

$\hat{e}_i$ 为空间坐标系的基矢量，$\hat{\mathbf{I}}_i$ 为物质坐标系的基矢量。

5.2 本构公理

5.2.1 决定论原理

决定性原理(principle of determinism)，是指连续介质体 $\mathscr{B}$(见图 5.1)中一点 X 在 t 时刻的状态响应(如应力 Σ、温度 T 等)，它除了依赖 X 和 t 之外，还同 $\mathscr{B}$ 中所有的质点 X^* 有关，而且还取决于 t 之前的所有时刻 t^*，即依赖各个质点的运动史。如一个晶格的振动就是如此。

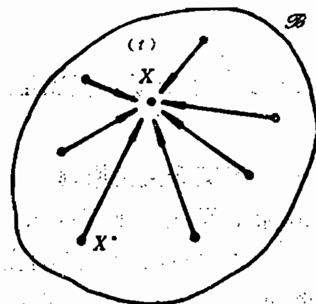


图 5.1

如果只考虑介质的力学行为，而不考虑温度，或者说温度影响很小，则在 t 时刻质点 X^* 的应力可表成如下的泛函(functional)的形式

$$\Sigma=\Sigma(x(X^*,t-t^*),X,t) \tag{5.19}$$

其中

$$X^*\in\mathscr{B},\quad t\leqslant t^*<\infty$$

从(5.19)式看出，泛函 $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ 显式地依赖 X，这样的介质体称作**非均质体**(heterogeneous body)，对于这样的介质体即使各个质点的力学史均相同，但质点不同，其响应也不同。如果对介质体中所有的质点，只要历史相同，其响应也相同，这样的介质体称作**均质体**(homogeneous body)，当然其泛函 $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ 则不显含 X 变量。

5.2.2 局部作用原理

局部作用原理(principle of local action)，是指介质体 $\mathscr{B}$ 中质点 X 的响应并不依赖 $\mathscr{B}$ 中所有的质点，而仅依赖 X 点邻域的变化情况，即依赖变形梯度。对于这样的介质体，可以假定泛函 $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ 取成

$$\Sigma = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}^t, X, t) \tag{5.20}$$

其中

$$\mathbf{F}^t = \frac{\partial}{\partial X^*} x(X^*, t - t^*)\bigg|_{X^* = X} = \frac{\partial}{\partial X} x(X, t - t^*) \tag{5.21}$$

在这里 $\mathbf{F}^t$ 是直到 t 时刻的变形梯度 $\mathbf{F}$ 的历史

如果材料(介质)仅依赖变形梯度 $\mathbf{F}^t$ 而不显式地依赖 X，这样的材料称为**简单材料**(simple material)。即应力可以表成

$$\Sigma = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}^t, t) \tag{5.22}$$

对于简单材料，本构泛函 $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ 可以通过纯“均匀变形”实验来确定，即使得 x 线性地依赖 X (从而 $\mathbf{F}$ 在物体中处处为常数)的实验来测定。

5.2.3 衰减记忆原理

衰减记忆原理(fading memory principle)，是指介质对于运动和变形等的久远历史逐渐淡忘，即介质的行为发生的越早对现在影响越小，只是近期的发挥作用，也就是依赖于对时间的变化率。对于这种介质，本构泛函 $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ 可表成

$$\Sigma = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, X, t) \tag{5.23}$$

如果介质又为简单材料，其本构现为

$$\Sigma = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, t) \tag{5.24}$$

如果所研究的介质不但满足局部作用原理而且没有记忆，则本构关系可写成

$$\Sigma = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}, X, t) \tag{5.25}$$

5.2.4 标架无关性原理

所谓标架无关性原理(frame-indifference principle)，亦称**客观性原理**(objectivity principle)，是指材料(介质)的响应不受参考标架和时间之选择的影响，即只要保证在变换时其距离、时间间隔和时间的取向保持不变，本构方程就应不变。这种变换具体如下

$$x' = \mathbf{A}(t) \cdot x + \pi(t) \qquad \text{(坐标系的空间变换)} \tag{5.26.1}$$

$$t' = t - t_0 \qquad \text{(时间的平移变换)} \tag{5.26.2}$$

其中 $\mathbf{A}$ 为 t 时刻空间标架绕原坐标系原点旋转的变换张量，见(3.23)式，即

$$\mathbf{A} = a_{ij}\hat{e}^i{}_i\hat{e}_j \quad , \quad \mathbf{A}_c = \mathbf{A}^{-1} \tag{5.27}$$

式(5.26)中的 $\pi(t)$ 是原坐标原点的空间位移，t_0 是个任意取定的时间。按(5.26)式，显然

保证了两点间的距离不变、时间间隔不变，即

$$|x'_1 - x'_2| \equiv |x_1 - x_2| \quad , \quad t'_1 - t'_2 \equiv t_1 - t_2$$

①时间平移

按(5.26.2)式的变换原则，取$t_0=t$，即$t'=0$，即把时间的坐标原点挪至现在，于是应力泛函$\tilde{\tilde{\Sigma}}$中则不显含t，如式(5.19)在新的坐标下写成

$$\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}^*, -t^*), \boldsymbol{X}, 0)$$

为了方便起见，令

$$-t^* = t \qquad 0 \geqslant t > -\infty$$

于是应力泛函表成

$$\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}^*, t), \boldsymbol{X}) \tag{5.28}$$

当然(5.20)～(5.25)式中的t亦随之变化，现应写成

$$\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}^*, \boldsymbol{X}) \qquad \text{（满足局部作用原理）} \tag{5.29}$$

$$\mathbf{F}^t = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) \tag{5.30}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}^t) \qquad \text{（简单材料）} \tag{5.31}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}) \qquad \text{（衰减记忆的简单材料）} \tag{5.32}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}, \boldsymbol{X}) \qquad \text{（满足局部作用原理、无记忆材料）} \tag{5.33}$$

②改换空间坐标系

现将x_i坐标系改换成x_i'坐标系，变换按(5.26.1)式，但按新的时间原点取法。变换若对现在，则在该式中取$t=0$；若对于历史，则$t<0$。从而对于现在时刻式(5.26.1)写成

$$\boldsymbol{x}' = \mathbf{A}(0) \cdot \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) + \boldsymbol{\pi}(0) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\pi} \tag{5.34}$$

对于满足局部作用原理的介质体，据(5.29)式，其应力在新的坐标系为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}' &= \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}'^t, \boldsymbol{X}) \\ &= \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^t, \boldsymbol{X}) = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{U}^t, \boldsymbol{X}) \end{aligned} \tag{5.35}$$

对于满足局部作用原理且无记忆的介质体，其应力表成（见(5.33)式）

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}', \boldsymbol{X}) = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \boldsymbol{X}) \tag{5.36}$$

应力张量既然是张量，当然不因空间坐标改变而改变，因而有

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \sigma_{pq} \hat{e}'_p \hat{e}'_q = \sigma_{mn} \hat{e}_m \hat{e}_n = \boldsymbol{\Sigma} \tag{5.37.1}$$

由此推出

$$\sigma'_{ij} = a_{im} a_{jn} \sigma_{mn} \tag{5.37.2}$$

或写成

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{A}_c \tag{5.37.3}$$

亦可推出

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}_c \cdot \boldsymbol{\Sigma}' \cdot \mathbf{A} \tag{5.38}$$

将(5.36)式代入上式中，则给出

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}_c \cdot \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}, \boldsymbol{X}) \cdot \mathbf{A} \tag{5.39}$$

由于上式对于任意旋转的标架(即对任意的正交张量 A)都成立,因此将 A 取成正交张量 R(见(5.15)式)的共轭张量 $\mathbf{R}_c$ 亦成立,现取

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_c \tag{5.40}$$

将上式代进(5.39)式中,则给出

$$\Sigma = \mathbf{R}\cdot\tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{U},X)\cdot\mathbf{R}_c \tag{5.41}$$

这就是满足局部作用原理的无记忆材料(介质)得到简化的本构泛函。由此可见,利用标架无关法则可使一般形式的本构泛函得到一定的简化,当然对其他那些本构原理的作用亦是如此。

5.2.5 **热的历史、等现性**

如上在论述本构公理时其介质体的响应均作为纯力学过程,不涉及热学过程。这种情形只有几种有限的情况下才成立,比如材料的热膨胀系数为零,或者在一定程度下可以忽略,于是任何的温度变化都不会影响力学的响应,从而不需要在本构关系中对温度予以考虑,这样的理论为纯力学理论(purely mechanical theory),这种理想化的材料称作力性材料(piezotropic materials)。

对于实际材料,只有在温度变化相对较小时才接近于力性材料,在绝大多数情况下是不成立的,必须把温度 T 看作一个独立变量,材料的响应依赖于它的热历史(thermal history)。因此在本构关系中,既有力学史又有温度史,于是描述纯力学过程的本构泛函(5.19)式应改变成

$$\Sigma = \tilde{\tilde{\Sigma}}(x(X^*,t-t^*),T(X^*,t-t^*),X,t) \tag{5.42}$$

$$X^*\in\mathscr{B}\quad,\quad 0\leqslant t^*<\infty$$

同纯力学响应情况一样,介质体的一个质点的响应往往也依赖于该质点附近那些质点的力学史和热历史,即满足局部作用原理。这样,如上的本构泛函可以简化为

$$\Sigma = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}^t,T^t,\Lambda_R^t,X,t) \tag{5.43}$$

其中

$$\mathbf{F}^t = \frac{\partial}{\partial X^*}x(X^*,t-t^*)\Big|_{X^*=X} = \frac{\partial}{\partial X}x(X,t-t^*) \tag{5.44.1}$$

$$\Lambda_R^t = \frac{\partial}{\partial X^*}T(X^*,t-t^*)\Big|_{X^*=X} = \frac{\partial}{\partial X}T(X,t-t^*) \tag{5.44.2}$$

$$T^t = T(X,t-t^*) \tag{5.44.3}$$

为了使用方便,有时把上式中的温度 T 的物质梯度 Λ_R^t 换成空间梯度 Λ^t,这二者的关系由下式给出

$$\begin{aligned}\Lambda_R^t &= \frac{\partial}{\partial X}T(X,t-t^*) = \frac{\partial}{\partial X}T(x(X,t-t^*),t-t^*)\\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^t\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^t = \mathbf{F}^t\cdot\Lambda^t\end{aligned} \tag{5.44.4}$$

由此看出,将 Λ_R^t 换成 Λ^t 并不增加(5.43)式的 $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ 的自变函数,即 $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ 除了依赖自变量 X 和 t 外还依赖 $\mathbf{F}^t$、T^t、Λ^t. 但有人又作了进一步简化,将依赖历史的温度空间梯度 Λ^t 取成现在值,即令 $\Lambda^t=\Lambda=\Lambda(X)$,不依赖历史。

如果所考虑的材料不仅满足局部作用原理，而且还是均质材料即简单材料，根据标架无关原理，可将时间坐标原点移至现在。从而(5.43)式中不显含 X, t，于是(5.43)和(5.44)式可表成

$$\Sigma = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}^t, T^t, \Lambda) \tag{5.45}$$

$$\mathbf{F}^t = \frac{\partial}{\partial X} x(X, t) \tag{5.46.1}$$

$$T^t = T(X, t) \tag{5.46.2}$$

$$\Lambda = \Lambda(X) = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{t=0} \tag{5.46.3}$$

$$X \in \mathscr{B} \quad , \quad 0 \geqslant t > -\infty \tag{5.46.4}$$

不仅应力泛函可以简化成(5.45)式的形式，而且对于考虑热和力并存过程的其他重要量如熵 S_*，自由能 f 和热流矢量 α 等，按等现性(equipresence)原理，这些量的泛函亦依赖如应力泛函那同样的自变函数。总之，归纳如下

$$\begin{cases} \Sigma = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}^t, T^t, \Lambda) \\ \alpha = \tilde{\tilde{\alpha}}(\mathbf{F}^t, T^t, \Lambda) \\ f = \tilde{\tilde{f}}(\mathbf{F}^t, T^t, \Lambda) \\ S_* = \tilde{\tilde{S}}_*(\mathbf{F}^t, T^t, \Lambda) \end{cases} \tag{5.47}$$

式中的 $\mathbf{F}^t$、T^t、Λ 如(5.46)式所示。(注意，亦有不少著作中，将 Λ 取成物质梯度 Λ_R；同时在(5.47)式所示的泛函中还引进内变量。本书有时也这样做。)

式(5.47)是关于考虑过程的力学史和热历史，且满足局部作用原理的均质材料(连续介质体)的四个基本本构泛函。它们将作为之后研究各种特定材料(介质)模型的出发点和基本原则。

5.3 热弹性体

由于弹性材料对过去发生的过程没有任何记忆，因此(5.47)式所示的应力泛函、自由能泛函、热流矢量泛函和比熵泛函都变成为现在时刻的变形梯度 $\mathbf{F}$、温度 T 和温度梯度 Λ 的普通函数，即为

$$\begin{cases} \Sigma = \hat{\hat{\Sigma}}(\mathbf{F}, T, \Lambda) \\ \alpha = \hat{\hat{\alpha}}(\mathbf{F}, T, \Lambda) \\ f = \hat{\hat{f}}(\mathbf{F}, T, \Lambda) \\ S_* = \hat{\hat{S}}(\mathbf{F}, T, \Lambda) \end{cases} \tag{5.48}$$

5.3.1 熵不等式对本构方程的限制

据(4.72)式，热弹性体的熵不等式为

$$\rho \frac{\mathrm{D}S_*}{\mathrm{D}t} - \frac{\rho g}{T} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\alpha_i}{T}\right) \geqslant 0 \tag{5.49}$$

上式可以化成

$$\rho T\frac{\mathrm{D}S_*}{\mathrm{D}t}-\rho g+\mathrm{div}\alpha-\frac{1}{T}\alpha\cdot\mathrm{grad}T\geqslant 0 \tag{5.50}$$

而根据能量守恒方程(4.58)式有

$$-\rho g+\mathrm{div}\alpha=-\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}+\mathbf{B}:\Sigma \tag{5.51}$$

将(5.51)式代进(5.50)式中给出

$$\rho\left(T\frac{\mathrm{D}S_*}{\mathrm{D}t}-\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}\right)+\mathbf{B}:\Sigma-\frac{1}{T}\alpha\cdot\mathrm{grad}T\geqslant 0 \tag{5.52}$$

根据(4.95)式,有

$$f=e-TS_* \tag{5.53}$$

对上式求物质导数,有

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}-T\frac{\mathrm{D}S_*}{\mathrm{D}t}-S_*\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} \tag{5.54}$$

而根据(5.48)式 f 的函数依赖关系,有

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial f}{\partial F_{ij}}\frac{\mathrm{D}F_{ij}}{\mathrm{D}t}+\frac{\partial f}{\partial T}\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}+\frac{\partial f}{\partial \Lambda_i}\frac{\mathrm{D}\Lambda_i}{\mathrm{D}t} \tag{5.55}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}F_{ij}}{\mathrm{D}t}&=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right)=\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{\mathrm{D}x_i}{\mathrm{D}t}\right)=\frac{\partial v_i}{\partial X_j}\\&=\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}=F_{kj}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\end{aligned} \tag{5.56}$$

根据(3.48)式,(5.52)式中的 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\Sigma}$ 可以写成

$$\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\Sigma}=B_{ik}\sigma_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\sigma_{ik}=\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tag{5.57}$$

将(5.54)～(5.57)式代进(5.52)式中,给出

$$\left(\sigma_{ik}-\rho F_{kj}\frac{\partial f}{\partial F_{ij}}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\rho\left(S_*+\frac{\partial f}{\partial T}\right)\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}-\rho\frac{\partial f}{\partial \Lambda_i}\frac{\mathrm{D}\Lambda_i}{\mathrm{D}t}-\frac{\alpha}{T}\cdot\mathrm{grad}T\geqslant 0 \tag{5.58}$$

在上式中 v_i、T、Λ_i 作为 x_k、t 的函数形式并未指定,即$\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$、$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$和$\frac{\partial \Lambda_i}{\partial t}$可以作为"变量"任取,而这些量前面的"系数"是由 σ_{ij}、f、S_*、ρ 及其它们对 F_{ij}、T 和 Λ_i 的"偏导数"组成,然而 σ_{ij}、f、S_*、ρ 作为 F_{ij}、T 和 Λ_i 的函数具体形式并未确定,因此$\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$、$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$和$\frac{\mathrm{D}\Lambda_i}{\mathrm{D}t}$变化并不"影响"它们,……。鉴于这种情况,要保证(5.58)式成立,$\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$、$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$和$\frac{\mathrm{D}\Lambda_i}{\mathrm{D}t}$前面的"系数"必须为零,于是推出

$$\begin{cases}\sigma_{ik}-\rho F_{kj}\dfrac{\partial f}{\partial F_{ij}}=0\\ S_*+\dfrac{\partial f}{\partial T}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial \Lambda_i}=0\end{cases} \tag{5.59}$$

$$-\frac{\alpha}{T}\cdot \mathrm{grad}T \geqslant 0 \tag{5.60}$$

据(4.53)式

$$\alpha = -\lambda \mathrm{grad}T, \quad \lambda > 0$$

所以式(5.60)大于等于零是永远成立，不管 T 如何取。

由(5.59)式推出如下重要结果

$$f = \hat{\hat{f}}(T, F_{ij}) = \hat{\hat{f}}(T, \mathbf{F}), \qquad (\text{与 } \Lambda_i \text{ 无关}) \tag{5.61}$$

$$S_{.} = -\frac{\partial f}{\partial T} \qquad (\text{参见(4.101)式}) \tag{5.62}$$

$$\sigma_{ik} = \rho F_{kj}\frac{\partial f}{\partial F_{ij}} \tag{5.63}$$

5.3.2 空间各向同性

空间各向同性(spatial isotropy)亦即标架无关性。现在熵不等式限制的基础上，再考虑标架无关原理对本构方程的限制。

由(5.61)式已知，在空间坐标系 $x_i = x_i(X_j, t)$ 之下

$$f = \hat{\hat{f}}(T, F_{ij}), \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{5.64}$$

现将空间坐标系平移、旋转，即将 x_i 系变成 x'_i 系(参见(5.26.1)式)

$$x'_i = a_{ik}x_k + \pi_i \tag{5.65}$$

则式(5.64)在新的坐标系下为

$$f = \hat{\hat{f}}(T, F'_{ij}), \quad F'_{ij} = a_{ik}F_{kj} \tag{5.66}$$

从(5.64)和(5.65)式推出

$$f = \hat{\hat{f}}(T, F_{ij}) = \hat{\hat{f}}(T, a_{ik}F_{kj}) \tag{5.67}$$

据(5.12)式，F_{ij}可以作极分解，将这个分解代进上式最右端中，给出

$$f = \hat{\hat{f}}(T, a_{ik}R_{km}U_{mj}) = \hat{\hat{f}}(T, \mathbf{A}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{U})$$

由于 $\mathbf{A}$ 是取任的，当然可取：$\mathbf{A} = \mathbf{R}_c$，因而由上推出

$$f = \hat{\hat{f}}(T, U_{ij}) = \hat{\hat{f}}(T, \mathbf{U}) \tag{5.68}$$

从而说明自由能 f 可作为伸长张量的函数，而与旋转张量 $\mathbf{R}$ 无关。

在此引进一个张量 $\mathbf{G}$——(右)**格林变形张量**(Green's deformation tensor)，它定义作

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}_c\cdot\mathbf{F}, \quad G_{ij} = F_{mi}F_{mj} = G_{ji} \tag{5.69}$$

由上式和(5.68)式可知，f 也作为 G_{ij}的函数，即有

$$f = \hat{\hat{f}}(T, G_{ij}) = \hat{\hat{f}}(T, \mathbf{G}) \tag{5.70}$$

将 f 作为 $\mathbf{G}$ 的函数，则

$$\frac{\partial f}{\partial F_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial G_{mn}}\frac{\partial G_{mn}}{\partial F_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial G_{mn}}\frac{\partial}{\partial F_{ij}}(F_{km}F_{kn})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial G_{mn}}(\delta_{ki}\delta_{mj}F_{kn} + F_{km}\delta_{ki}\delta_{nj})$$

$$= 2F_{in}\frac{\partial f}{\partial G_{jn}} \tag{5.71}$$

将上式代入(5.63)中，给出

$$\sigma_{ik} = 2\rho F_{kj}F_{in}\frac{\partial f}{\partial G_{jn}} \tag{5.72}$$

同理，对于(5.48)中的热流矢量 α 使用各向同性原理((isotropy principle)，并利用(5.49)所定义的 $\mathbf{G}$，则给出

$$\alpha_k = R_{ki}\hat{\alpha}_i\ \left(T, \frac{\partial T}{\partial x_j}, G_{jm}\right) \tag{5.73}$$

注意在上式中，对于温度的梯度是物质梯度，而没有用空间梯度。

式(5.70)、(5.72)、(5.73)和(5.62)构成了热弹性体的本构方程。

5.3.3 弹性体的应变能

现引进一个新的物理量——单位物质体积的应变能(strain energy)W，它与(5.70)式的自由能 f 有如下关系

$$W = \rho_0 f = \rho_0\hat{f}(G_{ij}) \tag{5.74}$$

在上式中没考虑 f 与 T 的关系，ρ_0 为介质变形前的密度视为常数。关于 W 为何可视作弹性应变能或称弹性能，将在下面看出。

据(5.74)式，W 当然作为 G_{ij} 的函数，对(5.74)式两边求偏导，则有

$$\frac{\partial W}{\partial G_{jk}} = \rho_0\frac{\partial f}{\partial G_{jk}} \tag{5.75}$$

再对 $W=\hat{W}(G_{ij})$ 求物质导数

$$\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial W}{\partial G_{mn}}\cdot\frac{\partial G_{mn}}{\partial F_{ij}}\cdot\frac{\mathrm{D}F_{ij}}{\mathrm{D}t} \tag{5.76}$$

参照(5.71)式，上式中的 $\frac{\partial W}{\partial G_{mn}}\frac{\partial G_{mn}}{\partial F_{ij}}$ 可表成

$$\frac{\partial W}{\partial G_{mn}}\frac{\partial G_{mn}}{\partial F_{ij}} = 2F_{ik}\frac{\partial W}{\partial G_{jk}}$$

而

$$\frac{\mathrm{D}F_{ij}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} = F_{mj}\frac{\partial v_i}{\partial x_m}$$

利用如上两式和(5.75)式，则(5.76)可写成

$$\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t} = 2\rho_0 F_{ik}F_{mj}\frac{\partial v_i}{\partial x_m}\frac{\partial f}{\partial G_{jk}}$$

利用(5.72)式的结果上式可写成

$$\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t} = \frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{im}\frac{\partial v_i}{\partial x_m} = \frac{\rho_0}{\rho}\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{B} \tag{5.77}$$

在上式中 $\mathbf{B}$ 为变形速度张量，亦即应变率张量$\{\dot{\varepsilon}_{ij}\}$，即有

$$\mathbf{B} = B_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j,\quad B_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \dot{\varepsilon}_{ij}$$

利用如上关系，(5.77)式写成

$$\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t} = \frac{\rho_0}{\rho}\sigma_{im}\dot{\varepsilon}_{im} \tag{5.78}$$

设 V_0 为弹性体变形前的体积，V 为它变形之后的体积。根据(3.82)和(4.13)式或者直接运用质量守恒，应有

$$\rho_0 \mathrm{d}V_0 = \rho \mathrm{d}V \tag{5.79}$$

将它代进(5.78)式中，给出

$$\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V_0 = \sigma_{im}\dot{\varepsilon}_{im}\mathrm{d}V$$

将上式积分

$$\int_V \sigma_{im}\dot{\varepsilon}_{im}\mathrm{d}V = \int_{V_0}\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V_0 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{V_0} W\mathrm{d}V_0 \tag{5.80}$$

从上式清楚地看出 W 的物理意义，W 为单位物质体积的应变能，应力作功的总和等于总应变能的增加。

在引入 W 之后，利用(5.75)式可将(5.72)式改写成

$$\sigma_{ik} = 2\frac{\rho}{\rho_0}F_{kj}F_{in}\frac{\partial W}{\partial G_{jn}} \tag{5.81.1}$$

或写成

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2\frac{\rho}{\rho_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}_c \tag{5.81.2}$$

其中

$$\mathbf{N} = \left\{\frac{\partial W}{\partial G_{ij}}\right\} \tag{5.82}$$

注意 $G_{ij}=G_{ji}$.

对于小变形的应变 ε_{ij}，定义为(见 12.4 节)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_i}\right) \tag{5.83}$$

其中 $\tilde{u}_i = x_i - X_i \quad , \qquad x_i = X_i + \tilde{u}_i$

由于为小变形，则

$$|\varepsilon_{ij}| \ll 1, \quad 即 \quad \left|\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j}\right| \ll 1$$

从而推出

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j}(\tilde{u}_i + X_i) \approx \delta_{ij}$$

于是(5.81.1)式可以近似为

$$\sigma_{ik} = 2\frac{\rho}{\rho_0}\delta_{kj}\delta_{in}\frac{\partial W}{\partial G_{jn}} = 2\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial G_{ik}} \tag{5.84}$$

而据(4.13)式

$$\rho_0 = J\rho, \quad J = |F_{ij}| \approx 1$$

根据上式，式(5.84)变成

$$\sigma_{ik} = 2\frac{\partial W}{\partial G_{ik}}$$

由于小变形，有下式成立

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(G_{ik} - \delta_{ik}) \tag{5.86}$$

利用上式,可把(5.85)式写成

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} \tag{5.87}$$

这就是对于弹性小变形,其应力与应变能之间的关系。

5.4 物质空间中的各向同性弹性体

对于物质空间各向同性的弹性体,应变能 W 的数值不因物质坐标系 X_i 旋转而改变。设物质坐标 $X_i \to X'_i$ 按下式变换

$$X'_i = Q_{ij}X_j \quad \text{或} \quad X' = \mathbf{Q} \cdot X \tag{5.88}$$

其中 Q 是正交张量

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}_c, \ |\mathbf{Q}| = 1 \tag{5.89}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = Q_{ij}\hat{\mathbf{I}}'_i\hat{\mathbf{I}}_j \\ X = X_i\hat{\mathbf{I}}_i \\ X' = X'_i\hat{\mathbf{I}}'_i \end{cases} \tag{5.90}$$

其中 $\hat{\mathbf{I}}'_i$ 和 $\hat{\mathbf{I}}_i$ 是新旧物质坐标系中轴向单位矢量。

在新旧物质坐标系下的变形梯度:

$$\mathbf{F} = F_{ij}\hat{e}_i\hat{\mathbf{I}}_j \quad , \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = F'_{ik}Q_{kj} \tag{5.91}$$

$$\mathbf{F}' = F_{ij}'\hat{e}_i\hat{\mathbf{I}}'_j \quad , \quad F'_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X'_j} = F_{ik}Q_{jk} \tag{5.92}$$

其中 $\hat{e}_i$ 为空间坐标系的 x_i 轴向单位矢量。由以上两式推出

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{Q} \quad , \quad \mathbf{F}' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_c \quad , \quad \mathbf{F}'_c = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_c \tag{5.93}$$

根据(5.69)式和上式,在新旧物质坐标系中的格林应变张量为

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{F} \tag{5.94}$$

$$\mathbf{G}' = \mathbf{F}'_c \cdot \mathbf{F}' = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_c) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_c) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{Q}_c \tag{5.95}$$

由此看出,在物质坐标系发生变化时,G 按二阶张量变化规律变化,这与它在空间坐标系发生变化时不同,在空间坐标系发生变化时,它按标量的变化规律变化。

根据(5.74)式,应变能 W 只是格林变形张量的函数。由于 W 是标量,所以根据物质空间各向同性的假设,W 在新旧物质坐标系中应该相等,即

$$\hat{\hat{W}}(\mathbf{G}) = \hat{\hat{W}}(\mathbf{G}') \tag{5.96.1}$$

亦即

$$\hat{\hat{W}}(G_{ij}) = \hat{\hat{W}}(G'_{ij}) \tag{5.96.2}$$

其中

$$G'_{ij} = Q_{im}Q_{jn}G_{mn}$$

由于标量 W 作为物质张量 G 的函数,当然 W 亦可看成为 G 的不变量 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 的函数,即有

$$W = \hat{\hat{W}}(G_{ij}) = \hat{\hat{W}}(\text{Ⅰ}, \text{Ⅱ}, \text{Ⅲ}) \tag{5.97}$$

其中

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{I} \ = \mathrm{trG} = G_{kk} \\ \mathrm{II} \ = \dfrac{1}{2}(\ \mathrm{I}^2 - \mathrm{trG}^2) \\ \mathrm{III} \ = \det\mathbf{G} = \dfrac{1}{6}\ \mathrm{I}^3 - \dfrac{1}{2}\ \mathrm{I}\mathrm{trG}^2 + \dfrac{1}{3}\mathrm{trG}^3 \end{array}\right. \tag{5.98}$$

由于

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial I}{\partial G_{ij}} = \dfrac{\partial G_{kk}}{\partial G_{ij}} = \delta_{ik}\delta_{ik} = \delta_{ij} \\ \dfrac{\partial}{\partial C_{ij}}(\mathrm{tr}\mathbf{G}^2) = \dfrac{\partial}{\partial C_{ij}}(G_{km}G_{mk}) = \dfrac{\partial G_{km}}{\partial G_{ij}}G_{mk} + G_{km}\dfrac{\partial G_{mk}}{\partial G_{ij}} \\ \qquad = 2(\delta_{ki}\delta_{mj})G_{mk} = 2G_{ij} \\ \dfrac{\partial}{\partial C_{ij}}(\mathrm{tr}\mathbf{G}^3) = \dfrac{\partial}{\partial C_{ij}}(G_{km}G_{mn}G_{nk}) = 3\dfrac{\partial G_{km}}{\partial G_{ij}}G_{mn}G_{nk} \\ \qquad = 3G_{ik}G_{kj} \end{array}\right. \tag{5.99}$$

利用以上诸式,可从式(5.98)求得

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathrm{II}}{\partial G_{ij}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial G_{ij}}(\ \mathrm{I}^{\ 2} - \mathrm{trG}^2) = \mathrm{I}\,\delta_{ij} - G_{ij} \\ \dfrac{\partial \mathrm{III}}{\partial G_{ij}} = \dfrac{1}{2}(\ \mathrm{I}^{\ 2} - \mathrm{trG}^2)\dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial G_{ij}} - \dfrac{1}{2}\ \mathrm{I}\dfrac{\partial}{\partial G_{ij}}(\mathrm{trG}^2) + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial G_{ij}}(\mathrm{trG}^3) \\ \qquad = \mathrm{II}\delta_{ij} - \mathrm{I}G_{ij} + G_{ik}G_{kj} \end{array}\right. \tag{5.100}$$

利用(5.99)和(5.100)式,可从(5.97)式求得偏微商

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial G_{ij}} &= \frac{\partial W}{\partial \mathrm{I}}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial G_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}}\frac{\partial \mathrm{II}}{\partial G_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}}\frac{\partial \mathrm{III}}{\partial G_{ij}} \\ &= \left(\frac{\partial W}{\partial \mathrm{I}} + \mathrm{I}\frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}} + \mathrm{II}\frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}}\right)\delta_{ij} \\ &\quad - \left(\frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}} + \frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}}\ \mathrm{I}\right)G_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}}G_{ik}G_{kj} \end{aligned}$$

于是据(5.82)式,则有

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial W}{\partial \mathrm{I}} + \mathrm{I}\frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}} + \mathrm{II}\frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}}\right)\mathbf{I} - \left(\frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}} + \frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}}\ \mathrm{I}\right)\mathbf{G} + \frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}}\mathbf{G}^2 \tag{5.101}$$

在此引进一个量——左格林变形张量 $\mathbf{P}$,它定义作

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}_c \tag{5.102}$$

则有

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}_c)\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}_c) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{F}_c \tag{5.103}$$

$$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}_c)\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}_c)\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}_c) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{G}^2\cdot\mathbf{F}_c \tag{5.104}$$

而据(4.13)式,则有

$$\rho_0 = \rho J = \rho\det\mathbf{F} \tag{5.105}$$

据(5.98)式

$$\mathrm{III} = \det\mathbf{G} = \det(\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{F}) = (\det\mathbf{F}^2) \tag{5.106}$$

由(5.81)式，已知应力张量

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2\frac{\rho}{\rho_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}_c$$

将式(5.101)～(5.106)代入上式给出

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2\,\mathrm{III}^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \mathrm{I}} + \mathrm{I}\frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}} + \mathrm{II}\frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}}\right)\mathbf{P} - \left(\frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}} + \frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}}\mathrm{I}\right)\mathbf{P}^2 + \frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}}\mathbf{P}^3\right] \tag{5.107}$$

由于 G 的不变量 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 也是 P 的不变量。对据凯雷—哈密尔顿定理，有

$$\mathbf{P}^3 = \mathrm{I}\,\mathbf{P}^2 - \mathrm{II}\,\mathbf{P} + \mathrm{III}\,\mathbf{I} \tag{5.108}$$

将上式代入(5.107)式中得到

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2\,\mathrm{III}^{-\frac{1}{2}}\left[\mathrm{III}\frac{\partial W}{\partial \mathrm{III}}\mathbf{I} + \left(\frac{\partial W}{\partial \mathrm{I}} + \mathrm{I}\frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}}\right)\mathbf{P} - \frac{\partial W}{\partial \mathrm{II}}\mathbf{P}^2\right] \tag{5.109}$$

将上式改写一种形式为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{P} + \alpha_2\mathbf{P}^2 \tag{5.110}$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_0 = 2\,\mathrm{III}^{\frac{1}{2}}\dfrac{\partial W}{\partial \mathrm{III}} \\ \alpha_1 = 2\,\mathrm{III}^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\partial W}{\partial \mathrm{I}} + \mathrm{I}\dfrac{\partial W}{\partial \mathrm{II}}\right) \\ \alpha_2 = -2\,\mathrm{III}^{-\frac{1}{2}}\dfrac{\partial W}{\partial \mathrm{II}}\end{cases} \tag{5.111}$$

由于 W 作为 P 的不变量的函数，所以 α_0、α_1、α_2 也是 P 的不变量。式(5.110)便是不考虑温度的情况下，物质空间各向同性弹性体应力张量的一种形式。

5.5 瑞尼俄—莱务林流体

前几节研究了几种满足局部作用原理、无记忆的均匀材料，本节仍研究这样的材料，但它有记忆。据(5.47)式，其应力本构泛函为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{F}^t, T^t, \boldsymbol{\Lambda})$$

现考虑的材料虽然有记忆，但都是短期记忆，如粘弹材料、粘性流体等。由于短期记忆，因此可以将本构关系由依赖历史简化成依赖现在时刻的随时间的变化率，于是如上的本构可以简化成如下的依赖关系

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, T, \dot{T}, \boldsymbol{\Lambda})$$

如果温度的梯度及温度对时间的变化率对应力影响很小，则上式写成

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, T) \tag{5.112}$$

其中 $$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) = \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial X} = \mathbf{Y}\cdot\mathbf{F}$$

从而看出 $\boldsymbol{\Sigma}$ 依赖 $\mathbf{Y}$、$\mathbf{F}$、T，然而根据材料的实际，我们研究的材料为流体。对于流体，其应力除了依赖 T 外，只与密度 ρ 和速度梯度 $\mathbf{Y}$ 有关，而与形状的改变即变形无关，因此 $\boldsymbol{\Sigma}$ 依

赖的 F 应以 detF 形式出现。

据(4.13)式

$$\rho_0 = J\rho \qquad , \qquad J = \det\mathbf{F} = \frac{\rho_0}{\rho} \tag{5.113}$$

通过如上分析，应力张量 Σ 的依赖关系应为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}\ (\rho, \mathbf{Y}, T) \tag{5.114}$$

速度梯度 Y 可以分解对称部分 B 和反对称部分 Z，见(3.47)式，即

$$\begin{cases} \mathbf{Y} = \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\hat{e}_i\hat{e}_j = \mathbf{B} + \mathbf{Z} \\ \mathbf{B} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\hat{e}_i\hat{e}_j = \dfrac{1}{2}(\mathbf{Y} + \mathbf{Y}_c) \\ \mathbf{Z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\hat{e}_i\hat{e}_j = \dfrac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_c) \end{cases} \tag{5.115}$$

于是(5.114)式可以写成

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}\ (\mathbf{B}, \mathbf{Z}, \rho, T) \tag{5.116}$$

现将空间坐标系旋转，由 x_i 系变为 x'_i 系，其变换为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} \qquad 或 \qquad x'_i = a_{ij}x_j \\ \boldsymbol{x} = \mathbf{A}_c \cdot \boldsymbol{x}' \qquad 或 \qquad x_i = a_{ji}x'_j \end{cases} \tag{5.117}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t) = a_{ij}(t)\hat{e}'_i\hat{e}_j \tag{5.118}$$

在新坐标系的速度 $\boldsymbol{v}'$

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{D}t} = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}\mathbf{A}}{\mathrm{D}t} \cdot \boldsymbol{x}$$

$$= (a_{ik}v_k + \dot{a}_{ik}x_k)\hat{e}'_i$$

其中

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{A}}{\mathrm{D}t} = \dot{\mathbf{A}} = \dot{a}_{ik}\hat{e}'_i\hat{e}_k$$

则

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ik}v_k + \dot{a}_{ik}x_k)\hat{e}'_i\hat{e}_j$$

$$= \left(a_{ik}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \dot{a}_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)\hat{e}'_i\hat{e}_j$$

$$= \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + \dot{\mathbf{A}}$$

在新坐标下的速度梯度

$$\mathbf{Y}' = \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial \boldsymbol{x}'} = \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}'}$$

$$= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + \dot{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{A}_c$$

$$\mathbf{Y}'_c = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{Y}_c \cdot \mathbf{A}_c + \dot{\mathbf{A}}_c)$$

由以上两式再加上(5.115)式则给出

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{2}(\mathbf{Y}' + \mathbf{Y}'_c)$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}_c + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{A}}_c) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_c \tag{5.119}$$

$$\mathbf{Z}' = \frac{1}{2}(\mathbf{Y}' - \mathbf{Y}'_c)$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}_c - \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{A}}_c) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A}_c \tag{5.120}$$

由于 $\mathbf{A}$ 为正交张量

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_c = \mathbf{I}$$

从而推出

$$\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}_c + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{A}}_c = \dot{\mathbf{I}} = 0$$

利用上式的结果,式(5.119)和(5.120)简化成

$$\mathbf{B}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_c \tag{5.121}$$

$$\mathbf{Z}' = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}_c + \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A}_c$$

$$= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}_c \cdot \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{A}_c \tag{5.122}$$

根据应力张量与标架的无关性,在(5.117)式的变换下,式(5.116)所示的应力张量在新的坐标系下为(注意 ρ、T 为标量,在新旧坐标系中一样)

$$\mathbf{\Sigma}' = \hat{\hat{\mathbf{\Sigma}}}\ (\mathbf{B}', \mathbf{Z}', \rho, T) \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{A}_c = \mathbf{A} \cdot \hat{\hat{\mathbf{\Sigma}}}\ (\mathbf{B}, \mathbf{Z}, \rho, T) \cdot \mathbf{A}_c$$

将(5.121)和(5.122)式代入上式左边,由此得到

$$\hat{\hat{\mathbf{\Sigma}}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_c, \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}_c \cdot \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{A}_c, \rho, T) = \mathbf{A} \cdot \hat{\hat{\mathbf{\Sigma}}}(\mathbf{B}, \mathbf{Z}, \rho, T) \cdot \mathbf{A}_c$$

由于在式(5.117)中的变换系数 $\mathbf{A}$ 是时间 t 的函数,且 $\mathbf{A}$ 是任取的,因此总可找到一个时刻 t_0,使得 $\mathbf{A}(t_0)=\mathbf{I}$ 且 $\dot{\mathbf{A}}(t_0)\neq 0$,于是在 t_0 时刻上式变成

$$\hat{\hat{\mathbf{\Sigma}}}(\mathbf{B}, \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{Z}, \rho, T) = \hat{\hat{\mathbf{\Sigma}}}(\mathbf{B}, \mathbf{Z}, \rho, T) \tag{5.123}$$

要使如上等式在 $t=t_0$ 时刻成立,则应有

$$\dot{\mathbf{A}}\ (t_0) + \mathbf{Z}(t_0) \equiv \mathbf{Z}(t_0) \tag{5.124}$$

然而,要使这个恒等式成立,必须要求

$$\dot{\mathbf{A}}\ (t_0) = 0$$

但是

$$\dot{\mathbf{A}}\ (t_0) \neq 0$$

从而恒等式(5.124)是不存在的,于是说明在 $t=t_0$ 时刻 $\hat{\hat{\mathbf{\Sigma}}}$ 与 $\mathbf{Z}$ 以致于与 $\dot{\mathbf{A}}+\mathbf{Z}$ 无关,当然在 $t\neq t_0$ 时 $\hat{\hat{\mathbf{\Sigma}}}$ 也应与 $\mathbf{Z}$ 或者与 $\dot{\mathbf{A}}+\mathbf{Z}$ 无关,所以(5.116)应表成

$$\mathbf{\Sigma} = \hat{\hat{\mathbf{\Sigma}}}\ (\mathbf{B}, \rho, T) \tag{5.125}$$

由于应力张量取(5.125)式所示的函数形式,与 $\mathbf{Z}$ 无关,因此在空间标架旋转时满足

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{A}_c = \hat{\hat{\mathbf{\Sigma}}}\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_c, \rho, T)$$

满足如上变换的二阶对称张量,为与标架无关的各向同性张量函数。根据这样张量的性质和哈密尔顿—凯雷定理,张量函数 $\hat{\hat{\mathbf{\Sigma}}}$ 可以表成 $\mathbf{B}$ 的二项式(详细证明,见附录 5.1),即

$$\Sigma = \hat{\hat{\Sigma}} \ (\mathbf{B}, \rho, T) = \beta_1 \mathbf{I} + \beta_2 \mathbf{B} + \beta_3 \mathbf{B}^2 \tag{5.126}$$

其中 β_1、β_2、β_3 为 $\mathbf{B}$ 的三个不变量以及 ρ 和 T 的函数。

满足(5.126)式本构方程的材料称为瑞尼俄—莱务林流体(Reiner-Rivlin fluid)，即一种非线性流体，亦即非牛顿粘性流体(non Newtonian viscous fluid)。如果在上式中 $\beta_3=0$，则成一般粘性流体的本构方程。

如上，从广义、抽象的普遍公理出发，给出了材料本构关系的某些一般的形式和构成本构方程的普遍指导思想。关于具体的某种材料的实用本构方程，我们将在以下诸章分别论述。

本章主要参考文献[1]和[2]。

附录 5.1

各向同性的二阶张量函数的形式

(尽供参考)

所谓各向同性张量函数，它与各向同性张量* 的概念不同，各向同性张量函数是指作为张量 $\mathbf{D}$ 的张量函数 $\mathbf{T}=\mathbf{f}(\mathbf{D})$，在坐标系作刚性旋转时，其函数形式 $\mathbf{f}(\mathbf{D})$ 保持不变。

现考虑二阶张量，设 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{T}$ 都是二阶对称张量，$\mathbf{T}$ 只是 $\mathbf{D}$ 的函数，即 $\mathbf{T}=\mathbf{f}(\mathbf{D})$。如果：$\mathbf{f}(\mathbf{D})$ 是各向同性张量函数，当标架任意旋转时(设其变换张量为 $\mathbf{A}$)则恒有

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{A}_c) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{D})\cdot\mathbf{A}_c \tag{1}$$

上式成立的充要条件为

$$\mathbf{f}(\mathbf{D}) = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2 \tag{2}$$

式中 α、β、γ 为 $\mathbf{D}$ 的不变量，$\mathbf{I}$ 为单位张量。上式便是各向同性的二阶张量函数的具体形式。

证明

为了书写方便，把在新坐标系中的张量符号上加"～"，而不加"′"，即

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{A}_c \ ; \ \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}_c$$

于是(1)式可写成

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{D}}) = \tilde{\mathbf{T}} \tag{3}$$

1. 证明式(2)为充分条件

式(2)若成立，它在新的坐标系中应表成

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{T}} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}_c = \mathbf{A}\cdot(\alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2)\cdot\mathbf{A}_c \\ &= \alpha\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}_c + \beta\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{A}_c + \gamma\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}^2\cdot\mathbf{A}_c\end{aligned} \tag{4}$$

而

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}_c = \mathbf{I} \quad , \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_c = \mathbf{I} = \mathbf{A}_c\cdot\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}^2\cdot\mathbf{A}_c = \mathbf{A}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}_c\cdot\mathbf{A}_c = \mathbf{A}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{A}_c$$

* 关于各向同性张量，见附录 6.1

$$= \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \cdot (\mathbf{A}_c \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}_c = \widetilde{\mathbf{D}}^2$$

于是(4)式可写成

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \alpha\mathbf{I} + \beta\widetilde{\mathbf{D}} + \gamma\widetilde{\mathbf{D}}^2$$

即(3)式的函数形式成立，$\mathbf{f}(\mathbf{D})$的函数形式不随坐标系旋转而改变。

2. 证明式(2)为必要条件

先征 **T** 和 **D** 有相同的主方向。设 **D** 在主轴坐标系下为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

而在该坐标系下

$$\mathbf{T} = \{T_{ij}\} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}, \quad T_{ij} = T_{ji} \tag{6}$$

将该坐标系按如下变换张量 **A** 旋转

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

则在新的坐标系下

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}_c = \mathbf{D} \tag{8}$$

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} T_{11} & -T_{12} & -T_{13} \\ -T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ -T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \tag{9}$$

而据(3)式

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{D}})$$

将(8)式代进上式，则推出

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{D}}) = \mathbf{f}(\mathbf{D}) = \mathbf{T} \tag{10}$$

将(6)和(9)式代进(10)式中，进行比较，则推出

$$\begin{cases} T_{12} = T_{21} = 0 \\ T_{13} = T_{31} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

同理，若把变换张量 **A** 取成

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

重复如上的步骤，则可推出

$$T_{23} = T_{32} = 0 \tag{13}$$

将(11)和(13)式代进(6)式中，则给出

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

其中

$$T_1 = T_{11} \quad , \quad T_2 = T_{22} \quad , \quad T_3 = T_{33} \tag{15}$$

由(14)式可知,在 **D** 的主轴坐标系下,**T** 也是对角形式,即 **T** 和 **D** 有相同的主方向。

由于在 **D** 的主轴坐标系中,**T** 和 **D** 同成对角形式,见(5)式和(14)式,而 $\mathbf{T}=\mathbf{f}(\mathbf{D})$,所以在主轴系统下

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{D}) = \mathbf{f}(D_1, D_2, D_3) \tag{16.1}$$

$$T_i = T_i(D_1, D_2, D_3) \tag{16.2}$$

不妨设上式的函数取一种特殊形式,即表作

$$\begin{cases} T_1 = T_1(D_1, D_2, D_3) = g(D_1) \\ T_2 = T_2(D_2, D_2, D_3) = g(D_2) \\ T_3 = T_3(D_3, D_2, D_3) = g(D_3) \end{cases} \tag{17}$$

因要求普遍函数形式的(16.2)式成立,首先必须满足各种特殊形式,如果特殊形式的函数都不满足,何有普遍形式?所以满足(17)式的这种特殊形式,是满足普遍形式(16)式的起码条件。将(17)式表成一般形式为

$$T = g(D)$$

设函数 g 是 D 的多项式(或是能展成 D 的收敛多项式(polynomial)形式),即

$$T = g(D) = \sum_{i=0}^{n} c_i D^i$$

式中 c_1、c_2,…,c_n 是常数。利用上式,则(17)式表成

$$\begin{cases} T_1 = \sum_{i=0}^{n} c_i D_1^i = C_0 + C_1 D_1 + c_2 D_1^2 + \cdots + c_n D_1^n \\ T_2 = \sum_{i=0}^{n} c_i D_2^i = C_0 + C_1 D_2 + c_2 D_2^2 + \cdots + c_n D_2^n \\ T_3 = \sum_{i=0}^{n} c_i D_3^i = C_0 + C_1 D_3 + c_2 D_3^2 + \cdots + c_n D_3^n \end{cases}$$

将上式代进(16.1)式中,给出

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} c_i D_1^i & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{n} c_i D_2^i & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{n} c_i D_3^i \end{bmatrix}$$

它可化成如下形式

$$\mathbf{T} = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{D} + c_2\mathbf{D}^2 + \cdots + c_n\mathbf{D}^n \tag{18}$$

其中

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} D_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & D_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3^2 \end{bmatrix},\cdots,\mathbf{D}^n = \begin{bmatrix} D_1^n & 0 & 0 \\ 0 & D_2^n & 0 \\ 0 & 0 & D_3^n \end{bmatrix}$$

由于(18)式在主轴坐标系中成立，当然可以推出任意坐标下该种函数形式如故。根据哈密尔顿—凯雷定理(1.119)式，有

$$\mathbf{D}^3 = \mathrm{I}_D\mathbf{D}^2 - \mathrm{II}_D\mathbf{D} + \mathrm{III}_D\mathbf{I}$$

其中 I_D、II_D、III_D 是 D 的第一、第二、第三不变量。

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^4 = \mathbf{D}\mathbf{D}^3 &= \mathbf{D}(\mathrm{I}_D\mathbf{D}^2 - \mathrm{II}_D\mathbf{D} + \mathrm{III}_D\mathbf{I}) \\
&= \mathrm{I}_D\mathbf{D}^3 - \mathrm{II}_D\mathbf{D}^2 + \mathrm{III}_D\mathbf{D} \\
&= \mathrm{I}_D(\mathrm{I}_D\mathbf{D}^2 - \mathrm{II}_D\mathbf{D} + \mathrm{III}_D\mathbf{I}) - \mathrm{II}_D\mathbf{D}^2 + \mathrm{III}_D\mathbf{D} \\
&= (\mathrm{I}_D^2 - \mathrm{II}_D)\mathbf{D}^2 - (\mathrm{I}_D\mathrm{II}_D - \mathrm{III}_D)\mathbf{D} + \mathrm{I}_D\mathrm{III}_D\mathbf{I}
\end{aligned}$$

以此类推 $\mathbf{D}^5$、$\mathbf{D}^6$、…、$\mathbf{D}^n$ 均可表成 D 的二次多项式，综上所论，式(18)可表成如下形式

$$\mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{D}) = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2 \tag{19}$$

其中 α、β、γ 是由 c_0、c_1、c_2、…、c_n 与 I_D、II_D、III_D 组合成的待定常数。当然 α、β、γ 也是不变量，它们可在主轴坐标系下确定，将(19)式用到主轴坐标系下，有

$$\begin{cases} T_1 = \alpha + \beta D_1 + \gamma D_1^2 \\ T_2 = \alpha + \beta D_2 + \gamma D_2^2 \\ T_3 = \alpha + \beta D_3 + \gamma D_3^2 \end{cases} \tag{20}$$

由上式便可确定 α、β、γ。由此看出，若 T=f(D)是 D 的各向同性张量函数，f(D)必有(19)式形式，即该形式是必要条件。当然，它是在主值取(17)式所示的特殊条件下推出的。

普遍性包括特殊性，既然在特殊情况都要有式(19)成立，当然对于普遍情况更要求有式(19)成立。所以说，式(2)即式(19)是 T=f(D)为 D 的各向同性函数的充要条件。

参考文献

[1] 周培基，A. K. 霍普肯斯. 材料对强冲击载荷的动态响应. 北京：科学出版社，1986

[2] 杜珣. 连续介质力学引论. 北京：清华大学出版社，1985

[3] 朱兆祥. 本构关系讲义. 合肥：中国科技大学，1980

[4] 杨桂通. 弹塑性力学. 北京：人民教育出版社，1980

[5] 吴望一. 流体力学. 北京：北京大学出版社，1982

[6] Mase G E. Continuum Mechanics，McGRAW-HILL BOOK COMPANY，1975